Oliver Schnürer, Universität Konstanz Wintersemester 2018/2019
Friederike Dittberner

Übungen zur Vorlesung Voll Nichlineare Partielle Differentialgleichungen

Blatt 5

Aufgabe 9. (2 Punkte)
Sei $n \geq 2$. Definiere $f : (0, \infty) \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$ durch

$$f(s,t) := \left(\frac{1+t}{s+t}\right)^{1/(n-1)} .$$

Zeige, dass für $s \in (0,1]$ und $t \geq 0$

$$f(s,t) \leq 1 + \frac{1}{n-1}\frac{1-s}{s(1+t)}$$

und für $s \geq 1$ und $t \geq 0$

$$f(s,t) \geq 1 + \frac{1-s}{1+t}$$

gilt.

Aufgabe 10. (4 Punkte)
Setze $\lambda = -\frac{1}{n-1}$. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ strikt konvex mit glattem Rand $\partial\Omega$.
Sei $\beta \geq 0$ und $u : \overline{\Omega} \times [0, \infty)$ eine Lösung von

$$\begin{cases} \partial_t u = \dfrac{\det\left(D^2 u\right)}{(1+|Du|^2)^\beta} & \text{in} \quad \Omega \times (0,\infty) \\ u & \text{ist strikt konvex in } \ \Omega \times (0,\infty) \\ u = 0 & \text{auf} \quad \partial\Omega \times [0,\infty) \,. \end{cases} \tag{3}$$

Sei $\psi \in C^\infty(\Omega) \cap C^{0,1}(\overline{\Omega})$ eine Lösung von

$$\begin{cases} \det\left(D^2\psi\right) = \lambda\psi & \text{in} \quad \Omega \\ \psi & \text{ist strikt konvex in } \ \Omega \\ \psi < 0 & \text{in } \ \Omega \\ \psi = 0 & \text{auf} \quad \partial\Omega \,. \end{cases}$$

Definiere

$$G(t) := \inf_{x \in \Omega} \left(1 + |Du(x,t)|^2\right)^{-\beta} .$$

Zeige:

(i) Es gilt $G(t_0) \geq G(t)$ für $0 \leq t_0 \leq t$.
(ii) Für alle $x \in \overline{\Omega}$ und $t \geq t_0$ gilt, dass

$$u(x,t) \geq \left(1 - \frac{g_1(t_0)}{1+t}\right) G^\lambda(t_0)(1+t)^\lambda \psi(x) \,,$$

wobei $g_1(t_0) > 0$ ist.
Hinweis: Konstruiere wie in Aufgabe 8 eine selbstähnliche Sublösung $\underline{u}(x,t) = \underline{\varphi}(t)\underline{\psi}(x)$ von (3), wobei $\underline{\psi} = G^\lambda \psi$ und $\underline{\varphi}$ geeignet gewählt ist.

(iii) Für alle $x \in \overline{\Omega}$ und $t \geq 0$ gilt, dass

$$u(x,t) \leq \left(1 - \frac{g_2}{1+t}\right)(1+t)^{\lambda}\psi(x)\,,$$

wobei $g_2(t_0) > 0$.
Hinweis: Konstruiere eine selbstähnliche Superlösung $\overline{u}(x,t) = \overline{\varphi}(t)\psi(x)$ von (3), wobei $\overline{\varphi}$ geeignet gewählt ist.

(iv) Wenn $\beta = 0$, dann gilt

$$\sup_{x\in\Omega}\left|\frac{u(x,t)}{(1+t)^{\lambda}} - \psi(x)\right| \leq \frac{C}{1+t}\,,$$

für alle $t \geq 0$, wobei $C = C(u(\cdot,0)) > 0$.

(v) Es gilt

$$\lim_{t\to\infty}\frac{u(x,t)}{(1+t)^{\lambda}} = \psi(x)$$

gleichmäßig in $\overline{\Omega}$.
Hinweis: Sei $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $t_k \nearrow \infty$. Zeige zunächst, dass $g_1(t_k) \to \frac{1}{n-1}$ für $k \to \infty$. Folgere dann aus (ii), dass $G(t_k) \to 1$ für $k \to \infty$.

Abgabe: Bis Montag, 14.01.2019, 15:00 Uhr, in die Mappe vor Büro F 402 oder in der Vorlesung.