Oliver Schnürer, Friederike Dittberner

Universität Konstanz

Wintersemester 2018/2019

Übungen zur Vorlesung Voll Nichlineare Partielle Differentialgleichungen

Blatt 4

Aufgabe 7. (12 Punkte)
Setze $\lambda = -\frac{1}{n-1}$ und sei $\delta_0 > 0$.
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ strikt konvex mit glattem Rand $\partial\Omega$. Sei $\delta \in (0, \delta_0)$ und $\psi := \psi_\delta \in C^\infty(\Omega) \cap L^\infty(\overline{\Omega})$ nach Aufgabe 6 die eindeutige, lokal strikt konvexe Lösung für das Problem

$$\begin{cases} \det\big(D^2\psi\big) = \lambda(\psi - \delta) & \text{in} \quad \Omega \\ \psi = 0 & \text{auf} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

wobei es Konstanten $C, k > 0$ mit $\sup_\Omega |\psi| \geq k$ und $|D\psi| \leq C$ für alle $\delta \in (0, \delta_0)$ gibt. Definiere die Funktion,

$$w := -\psi \exp\left(\frac{c|D\psi|^2}{2}\right) \partial^2_\alpha \psi$$

wobei $\alpha \in \{1, \ldots, n\}$.

(i) Zeige, dass w das Maximum in einem Punkt $x_0 \in \Omega$ annimmt.
(ii) Nehme ohne Einschränkung an, dass $\partial_i\partial_j\psi(x_0) = 0$ für $i \neq j$.
Berechne

$$\partial_i \log(w)\,, \quad \partial_i\partial_j \log(w)\,, \quad \partial_\alpha \log\big(\det D^2\psi\big)\,, \quad \partial^2_\alpha \log\big(\det D^2\psi\big)$$

in x_0, für $i \in \{1, \ldots, n\}$.
Folgere, dass

$$\partial^2_\alpha \psi(x_0) \leq C\left(1 - \frac{1}{\psi(x_0)}\right)$$

und damit $D^2\psi$ gleichmäßig in δ beschränkt ist.
Hinweis: Folge den inneren Abschätzungen im Zusatzmaterial. Ersetze die vorletzte Zeile auf Seite 469 mit:

$$= \frac{|D_\gamma u|^2}{u^2 D_{\gamma\gamma}u} + \sum_{i\neq\gamma} F_{ii}\left(\frac{D_i u}{u} + \beta D_i u D_{ii} u\right)^2 - 2\beta \sum_{i\neq\gamma} \frac{(D_i u)^2}{u} - \beta^2 \sum_{i\neq\gamma} (D_i u)^2 D_{ii} u$$

Aufgabe 8. (4 Punkte) Setze $\lambda = -\frac{1}{n-1}$ und sei $\delta_0 > 0$.
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ strikt konvex mit glattem Rand $\partial\Omega$.

Zeige:

(1) Das Randwertproblem

$$\begin{cases} \partial_t u = \det\big(D^2 u\big) & \text{in} \quad \Omega \times (0, \infty) \\ u & \text{ist strikt konvex in} \quad \Omega \times (0, \infty) \\ u = 0 & \text{auf} \quad \partial\Omega \times [0, \infty)\,. \end{cases} \tag{2}$$

besitzt eine selbstähnliche Lösung $u : \overline{\Omega} \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$ mit

$$u(x, t) = (1 + t)^\lambda \psi(x)$$

besitzt, wobei $\psi \in C^\infty(\Omega) \cap C^{0,1}(\overline{\Omega})$ eine eindeutige Lösung des nichtlinearen Eigenwertproblems

$$\begin{cases} \det\big(D^2\psi\big) = \lambda\psi & \text{in} \quad \Omega \times (0,\infty) \\ \psi & \text{ist strikt konvex in } \Omega \\ \psi < 0 & \text{in } \Omega \\ \psi = 0 & \text{auf} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

ist.

(2) Falls

$$\tilde{u}(x,t) = \varphi(t)\tilde{\psi}(x)$$

eine beliebige Lösung von (2) ist, dann existiert eine eindeutige Konstante $c > 0$ sodass

$$\tilde{\psi}(x) = c\psi(x)$$

und

$$\tilde{u}(x,t) = u(x,t)\left(\frac{1+t}{|c\varphi(0)|11-n+t}\right)^{-\lambda}.$$

Abgabe: Bis Montag, 17.12.2018, 15:00 Uhr, in die Mappe vor Büro F 402 oder in der Vorlesung.