Oliver Schnürer, Universität Konstanz Wintersemester 2018/2019
Friederike Dittberner

Übungen zur Vorlesung Voll Nichlineare Partielle Differentialgleichungen

Blatt 3

Aufgabe 6. (16 Punkte)
Setze $\lambda = -\frac{1}{n-1}$ und sei $\delta_0 > 0$.
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ strikt konvex mit glattem Rand $\partial\Omega$, wobei $\partial\Omega$ als Niveaufläche einer Funktion $\rho : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $|D\rho| \neq 0$ auf $\partial\Omega$ gegeben ist.

(i) Zeige, dass es für jedes $\delta \in (0, \delta_0)$ eine eindeutige, lokal strikt konvexe Lösung $\psi_\delta \in C^\infty(\Omega) \cap L^\infty(\overline{\Omega})$ für das Problem

$$\begin{cases} \det\bigl(D^2\psi\bigr) = \lambda(\psi - \delta) & \text{in} \quad \Omega \\ \psi = 0 & \text{auf} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

gibt.
Hinweis: Betrachte die Funktion $\underline{\psi} = \rho + \kappa(e^\rho - 1)$, wobei $\kappa > 0$ eine Konstante ist.

(ii) Nehme ψ_δ an x_0 sein Minimum an. Sei $\varepsilon > 0$, sodass für

$$Q := \left\{ x \in \Omega \ : \ \frac{\operatorname{dist}(x, \partial\Omega)}{\operatorname{diam}(\Omega)} \geq \varepsilon \right\}$$

$|Q| > 0$ gilt. Sei χ_Q die charakteristische Funktion von Q.
Zeige, dass

$$\psi_\delta(x) \leq \varepsilon \chi_Q(x) \psi_\delta(x_0)$$

für alle $x \in \Omega$.
Hinweis: Betrachte den Kegel durch $\partial\Omega$ mit Spitze in $\psi_\delta(x_0)$.

(iii) Lies Paragraph 3.2 auf der Rückseite und folgere, dass es $\tilde{\psi}_\delta \in C(\overline{\Omega})$ mit

$$\mu\left(\tilde{\psi}_\delta, \omega\right) = \lambda \varepsilon \psi_\delta(x_0) \int_\omega \chi_Q(x)\, dx$$

und

$$\tilde{\psi}_\delta \geq \psi_\delta$$

gibt.

(iv) Zeige, dass es eine Konstante $k > 0$ mit

$$\sup_\Omega |\psi_\delta| \geq k$$

für alle $\delta > 0$ gibt.
Himweis: Benutze weiterhin Paragraph 3.2 und (iii).

(v) Zeige, dass es eine Konstante $C > 0$ mit

$$|D\psi_\delta| \leq C$$

für alle $\delta > 0$ gibt.

Abgabe: Bis Montag, 03.12.2018, 15:00 Uhr, in die Mappe vor Büro F 402 oder in der Vorlesung.

3.2. Let $v \in C(\bar{\Omega})$ and be convex. At every point $\big(y, v(y)\big)$, $y \in \Omega$, there exists at least one supporting (hyper–) plane to the graph of v. We write the equation of a supporting plane as

$$z - v(y) = \big\langle p(y), (x-y)\big\rangle, \quad p(y) = \big(p_1(y), \ldots, p_n(y)\big),$$

and consider the map (generally multivalued) $\gamma : \Omega \to P^n$, $\gamma(y) = p(y)$. For any Borel set $\omega \subset \Omega$, put

$$\mu(v, \omega) = \int_{\gamma(\omega)} dp, \qquad \text{where } \gamma(\omega) = \bigcup_{y \in \omega} \gamma(y).$$

Let σ be a nonnegative completely additive measure on Borel subsets of Ω. Consider the equation for a convex $v \in C(\bar{\Omega})$ such that

$$\mu(v, \omega) = \sigma(\omega), \quad \omega \subset \Omega,\ u = 0 \text{ on } \partial\Omega, \tag{3.4}$$

where ω is a Borel subset of Ω. If $v \in C^2(\Omega)$, then $\gamma(y) = \operatorname{grad} v(y)$ and

$$\mu(v, \omega) = \int_{\gamma(\omega)} dp = \int_{\omega} \det[v_{ij}]\, dx.$$

This relation shows the connection between the measure μ and the operator M. Consequently, any smooth convex solution ψ of (3.1), (3.2) will also satisfy the equation

$$\mu(\psi, \omega) = \lambda \int_{\omega} (\psi - \delta)\, dx, \qquad \omega \subset \Omega.$$

Consider now the measure σ defined by

$$\sigma(\omega) = \int_{\omega} g(x)\, dx,$$

where g is a nonnegative integrable function in $\bar{\Omega}$. Under such circumstances it is known [Ba], Section 20, that if for all $x \in \Omega$, sufficiently close to $\partial\Omega$

$$g(x) \le a[\operatorname{dist}(x, \partial\Omega)]^s, \qquad a = \text{const} > 0,\ s \ge 0, \tag{3.5}$$

$$\sigma(\Omega) < \infty, \tag{3.6}$$

then there exists a unique convex solution $u \in C(\bar{\Omega})$ of (3.4).

Thus, on the class of measures σ, generated as above, and satisfying (3.5)-(3.6) a solution operator A of (3.4) is defined. It can be shown [Ba] that A is monotone, that is, if $g_1(x) \le g_2(x)$, $x \in \bar{\Omega}$, then

$$(Ag_1)(x) \ge (Ag_2)(x), \qquad x \in \bar{\Omega}. \tag{3.7}$$

We also note the following property of the operator A:

$$A(Cg) = C^{1/n} Ag, \qquad \text{for any constant } C \ge 0. \tag{3.8}$$