Oliver Schnürer, Universität Konstanz Wintersemester 2017/2018
Friederike Dittberner

Übungen zur Vorlesung Partielle Differentialgleichungen II

Blatt 2

Aufgabe 7. (2 Punkte)
Führe die Details zu $\Delta w = f$ im Beweis von Theorem 1.8 aus.

Aufgabe 8. (Dimensionsunabhängige Normen) (4 Punkte)

(i) Präzisiere die Aussage, dass sich die dimensionsunabhängigen Normen $\|\cdot\|'_{C^{k,\alpha}(\Omega)}$ unter Homothetien des Gebietes nicht ändern und beweise sie.
(ii) Sei $u \in C^{0,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$, $v \in C^{0,\beta}\left(\overline{\Omega}\right)$ und $\gamma = \min\{\alpha, \beta\}$. Dann ist $u \cdot v \in C^{0,\gamma}\left(\overline{\Omega}\right)$ und es gilt
$$\|u \cdot v\|'_{C^{0,\gamma}(\Omega)} \le \|u\|'_{C^{0,\alpha}(\Omega)} \cdot \|v\|'_{C^{0,\beta}(\Omega)}.$$

Aufgabe 9. (4 Punkte)
Nimm an, dass Theorem 1.11 für $R = 1$ bereits gezeigt sei und folgere daraus die Behauptung
$$\left\|D^2 w\right\|'_{C^{0,\alpha}(B_R(x_0))} \le C(n,\alpha) \cdot \|f\|'_{C^{0,\alpha}(B_{3R}(x_0))}$$
für
$$w(x) = \int_{B_{3R}(x_0)} \Gamma(|x-y|) f(y)\, dy$$
und beliebige $R > 0$.

Aufgabe 10. (2 + 4 Punkte)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Sei $u \in C^0\left(\overline{\Omega}\right)$. Sei $0 < \alpha < 1$.

(i) Gelte
$$\operatorname*{osc}_{B_r(x)\cap\Omega} u \le C \cdot \left(\frac{r}{R}\right)^\alpha \cdot \left(\operatorname*{osc}_{B_R(x)\cap\Omega} u + c \cdot R^\alpha\right)$$
für alle $x \in \Omega$ und alle $0 < r \le R$.
Zeige, dass $u \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ gilt.
(ii) Gelte
$$\operatorname*{osc}_{B_r(x)} u \le C \cdot \left(\frac{r}{R}\right)^\alpha \cdot \left(\operatorname*{osc}_{B_R(x)} u + c \cdot R^\alpha\right)$$
für alle $0 < r \le R$ und $B_R(x) \subset \Omega$ sowie
$$\operatorname*{osc}_{B_r(z)\cap\Omega} u \le C \cdot \left(\frac{r}{R}\right)^\alpha \cdot \left(\operatorname*{osc}_{B_R(z)\cap\Omega} u + c \cdot R^\alpha\right)$$
für alle $z \in \partial\Omega$ und alle $0 < r \le R$.
Zeige, dass $u \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ gilt.

Hinweis: Vergleiche für $x_1, x_2 \in \Omega$ den Abstand $|x_1 - x_2|$ mit dem Abstand zu $\partial\Omega$ und benutze die beiden angegebenen Abschätzungen ggf. mehrfach.

Abgabe: Bis Dienstag, 14.11.2017, 10:00 Uhr, in die Mappe vor Büro F 402.