Oliver Schnürer, Universität Konstanz Wintersemester 2017/2018
Friederike Dittberner

Übungen zur Vorlesung Partielle Differentialgleichungen II

Blatt 13

Aufgabe 46. (3+3+4 Punkte)
Sei $u : \mathbb{R}^n \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$ eine $\mathbb{Z}^n$-periodische Lösung von

$$\dot{u} = e^{-u} \Delta u \, .$$

(i) Zeige C^0-Schranken für u in Abhängigkeit von $\|u(\cdot, 0)\|_{C^0}$.
(ii) Zeige, dass u für $t > \varepsilon > 0$ gleichmäßig hölderstetig ist.
(iii) Benutze parabolische Schaudertheorie, also

$$\|u\|_{C^{2,\beta}(Q(r/2))} \le c\left(r, n, \alpha, \beta, \|a^{ij}\|_{C^{0,\alpha}}, \|b^i\|_{C^{0,\alpha}}, \|d\|_{C^{0,\alpha}}, \lambda\right) \cdot \left(\|u\|_{C^0(Q(r))} + \|f\|_{C^{0,\alpha}(Q(r))}\right)$$

für $0 < \beta \le \frac{\alpha}{2}$ und $Lu = -\dot{u} + a^{ij} u_{ij} + b^i u_i + du = f$ mit $a^{ij} \xi_i \xi_j \ge \lambda |\xi|^2$, um höhere Regularität von u für $t > \varepsilon > 0$ zu zeigen.

Aufgabe 47. (6 Punkte)
Sei $\Omega \in \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Sei $\Gamma \subset \operatorname{Sym}_n(\mathbb{R})$ konvex.
Sei $F \in C^1(\Gamma, C^0(\Omega))$ strikt konvex, d. h. gelte $\frac{\partial F}{\partial r_{ij}} > 0$ für alle $r \in \Gamma$.
Definiere

$$s_{ij}(x, u) := u_{ij}(x) + u_i(x) u_j(x) - \frac{1}{2} |Du(x)|^2 \delta_{ij} + b_{ij}(x)$$

für $b_{ij} \in \operatorname{Sym}_n(\mathbb{R})$.
Seien $u, v \in C^2(\Omega)$ mit $s(x, u), s(x, v) \in \Gamma$ für alle $x \in \Omega$ Lösungen von

$$F(s(x, u)) = f(x, Du) \quad \text{bzw.} \quad F(s(x, v)) = f(x, Dv)$$

mit $u \ge v$ auf $\partial\Omega$.

Zeige, dass dann auch $u \ge v$ in Ω gilt.

Hinweis: Benutze den Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung und das Maximumprinzip. Begründe jeweils, warum die Argumente von F in Γ liegen.

Abgabe: Bis Dienstag, 13.02.2018, 10:00 Uhr, in die Mappe vor Büro F 402.