Friederike Dittberner Universität Konstanz Wintersemester 2018/2019

Übungen zur Vorlesung Mittlerer Krümmungsfluss

Blatt 6

Definition 3 (δ-noncollapsed)**.** Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ offen, sodass $M = \partial\Omega$ eine n-dimesionale Hyperfläche mit $H > 0$ ist. M heißt δ-noncollapsed, falls es für jedes $x \in M$ einen offenen Ball B mit Radius $\delta/H(x)$ gibt, der in Ω enthalten ist und sodass $x \in \partial B$.

Aufgabe 17. (2 Punkte) Sei M^n eine Mannigfaltigkeit und $M = X(M^n)$. Definiere $Z : M^n \times M^n \to \mathbb{R}$ durch

$$Z(p, q) = \frac{H(p)}{2}\|X(q) - X(p)\|^2 + \delta\langle X(q) - X(p), \nu(p)\rangle\,.$$

Zeige, dass M genau dann δ-noncollapsed ist, wenn $Z(p, q) \geq 0$ für alle $p, q \in \bar{M}^n$.

Aufgabe 18. (4 Punkte) Sei M^n ein kompakte Mannigfaltigkeit und $X : M^n \times [0, T) \to \mathbb{R}^{n+1}$ eine Familie von glatten Einbettungen, die sich nach dem mittleren Krümungsfluß bewegen. Definiere $Z : M^n \times M^n \times [0, T) \to \mathbb{R}$ durch

$$Z(p, q, t) = \frac{H(p, t)}{2}\|X(q, t) - X(p, t)\|^2 + \delta\langle X(q, t) - X(p, t), \nu(p, t)\rangle$$

und außerdem

$$d = \|X(q, t) - X(p, t)\|\,, \quad w = \frac{X(q, t) - X(p, t)}{d}\,, \quad \partial_i^p = \frac{\partial X}{\partial p^i}\,, \quad \partial_i^q = \frac{\partial X}{\partial q^i}\,.$$

Zeige, dass

$$\nu_p + \frac{d}{\delta}H_p w - \frac{1}{\delta}\partial_i^q g_q^{ij}\partial_j^y = \nu_q\sqrt{1 + \frac{2}{\delta^2}H_p Z - \frac{1}{\delta^2}|\nabla_q Z|^2}\,.$$

Folgere, dass an einem Minimumpunkt von Z,

$$\nabla_j H_p = \frac{2}{d^2}\partial_j^p Z + \frac{2}{d}\langle w, H_p\partial_j^p - \delta h_{jk}^p g_p^{kl}\partial_l^q\rangle$$

sowie

$$\partial_n^p - \langle\partial_n^p, \partial_n^q\rangle\partial_n^q = \langle\partial_n^p, \nu_q\rangle\nu_q$$

sowie

$$\langle\partial_n^p, \nu_q\rangle = -\frac{d}{\delta}H_p\langle w, \partial_n^q\rangle$$

gilt. Schließe daraus, dass

$$\left(\partial_t - g_p^{ij}\partial_{ij}^q + g_q^{ij}\partial_{ij}^q - 2g_p^{ik}g_q^{jl}\langle\partial_k^p, \partial_l^q\rangle\partial_i^p\partial_j^q\right)Z = \left(|h^p|^2 + \frac{4H_p(H_q - \delta h_{nn}^p)}{\delta^2 + 2H_p Z}\langle\partial_n^p, w\rangle^2\right)Z \leq 0\,.$$

Abgabe: Bis Mittwoch, 06.02.2019, 10:00 Uhr, in die Mappe vor Büro F 402.