Übungen zur Vorlesung Mittlerer Krümmungsfluss

Blatt 2

Aufgabe 6. (16 Punkte)
Sei $\Sigma = X(I) \subset \mathbb{R}^2$, $I \in \{\mathbb{S}^1, \mathbb{R}\}$, eine glatte, vollständige, eingebettete Kurve, die $\kappa(x) = \langle x, \nu(x)\rangle$ für alle $x \in \Sigma$ erfüllt.

(i) Berechne $\partial_s \kappa$ und $\partial_s |X|^2$ und zeige, dass Σ entweder eine Gerade ist, oder strikt konvex mit
$$\kappa(x) = C \exp\left(\frac{|x|^2}{2}\right)$$
für ein $C > 0$ und alle $x \in \Sigma$.

(ii) Nehme an, dass Σ keine Gerade ist.
Benutze lokal die Koordinate $\vartheta = \arccos\langle e_1, \nu\rangle$.
Berechne
$$\partial_\vartheta \kappa\,, \qquad \partial_\vartheta^2 \kappa \qquad \text{und} \qquad \partial_\vartheta\big((\partial_\vartheta \kappa)^2 + \kappa^2 - \log \kappa^2\big)$$
und folgere, dass Σ geschlossen ist.
Wann gilt, dass Σ ein Kreis ist?
Hinweis: Drücke zunächst ν mithilfe von ϑ aus und berechne $\partial_s \vartheta$ in der indirekten Darstellung.

(iii) Nehme an, dass Σ keine Gerade und kein Kreis ist.
Das System
$$\left\{1, \sqrt{2}\cos(n\vartheta), \sqrt{2}\sin(n\vartheta)\right\}_{n\in\mathbb{Z}}$$
ist eine orthonormale Basis der periodischen Funktionen im Hilbertraum $C^2(\mathbb{S}^1)$ bezüglich des inneren L^2-Produktes.
Zeige, dass $\frac{1}{\kappa^2}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\kappa$ orthogonal auf den ersten 5 Basisfunktionen steht.
Folgere, dass die Nullstellen ϑ_i, $i \in \{0, \dots, i_0\}$, von κ isoliert und endlich sind und nicht weiter als $\pi/2$ auseinander liegen.

(iv) Nehme an, dass Σ keine Gerade und kein Kreis ist.
Folgere mit (ii) dass an einem lokalen Minimum $\kappa < 1$ und an einem lokalen Maximum $\kappa > 1$ gilt.
Zeige, dass
$$\partial_\vartheta^3 \kappa^2 + 4\partial_\vartheta \kappa^2 = 4\frac{\partial_\vartheta \kappa}{\kappa}$$
gilt. Sei ohne Einschränkung $\vartheta_{i_0} = 0$. Berechne
$$4\int_0^{\vartheta_0} \sin(2\vartheta)\frac{\partial_\vartheta \kappa}{\kappa}\, d\vartheta$$
und erhalte einen Widerspruch.

(v) Folgere, dass Σ entweder eine Gerade durch den Ursprung oder die $\mathbb{S}^1$ ist.

Abgabe: Bis Mittwoch, 21.11.2018, 10:00 Uhr, in die Mappe vor Büro F 402.