

ÜBUNGEN ZUR VORLESUNG MITTLERER KRÜMMUNGSFLUSS

Blatt 1**Aufgabe 1.** (2 Punkte)

Zeige, dass eine offene Überdeckung des Intervalles $[0, 1]$ durch Teilintervalle eine endliche Überdeckung

$$[0, 1] \subset \bigcup_{j=1}^k I_j \quad \text{mit} \quad \sum_{j=1}^k |I_j| \leq 2$$

enthält.

Aufgabe 2 (Fubini). (4 Punkte)

Sei $\mathbb{R}_t^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x^n = t\} \subset \mathbb{R}^n$. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und $U_t := U \cap \mathbb{R}_t^{n-1}$ von Maß Null in $\mathbb{R}_t^{n-1} \cong \mathbb{R}^{n-1}$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

Zeige, dass dann auch U von Maß Null in \mathbb{R}^n ist.

Hinweis: Betrachte zunächst $U \subset \mathbb{R}^{n-1} \times [0, 1]$. Für festes $t \in [0, 1]$ und $\varepsilon > 0$, überdecke U_t mit Würfeln W_t^i sodass $\sum_i |W_t^i| < \varepsilon$. Schätze die Menge $\{x \in U \mid |x^n - t| < \alpha\}$ für geeignetes α ab und benutze Aufgabe 1.

Aufgabe 3. (8 Punkte)

Seien $n, m \geq 1$ und $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Sei $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ in C^k mit $k > \max\{n - m, 0\}$. Ein Punkt $p \in \mathbb{R}^n$ heißt regulär, falls das Differential von f in p surjektiv ist. Ein Punkt $q \in \mathbb{R}^m$ heißt regulärer Wert, falls $f^{-1}(q)$ aus regulären Punkten besteht. Nicht reguläre Punkte/Werte nennt man singular oder kritisch. Sei $D_i \subset U$ die Menge aller Punkte, in denen alle partiellen Ableitungen der Ordnung $\leq i$ verschwinden.

Es gelte für alle Funktionen $g : V \rightarrow \mathbb{R}^m$, $V \subset \mathbb{R}^{n-1}$ offen, in C^l mit $l > \max\{n - 1 - m, 0\}$, dass die Menge der kritischen Werte von g in \mathbb{R}^m Lebesgue-Maß Null hat.

Zeige, dass folgendes gilt

- (i) $f(D \setminus D_1)$ hat Maß Null.

Hinweis: Betrachte für geeignete Koordinaten die Funktionen $h(x) = (f^1(x), x^2, \dots, x^n)$ und $g = f \circ h^{-1}$.

- (ii) $f(D_i \setminus D_{i+1})$ hat Maß Null.

Hinweis: Verfahre ähnlich wie in (i) mit $h(x) = (\frac{\partial^k}{\partial x^{\nu_1} \dots \partial x^{\nu_k}} f^1(x), x^2, \dots, x^n)$ für geeignete Koordinaten.

- (iii) $f(D_k)$ von Maß Null.

Hinweis: Schätze $|f(x+h) - f(x)|$ mithilfe der Taylorentwicklung auf kleinen Würfeln ab.

Aufgabe 4 (Satz von Sard). (2 Punkte)

Seien N^n und M^m differenzierbare Mannigfaltigkeiten mit einer abzählbaren Basis der Topologie. Sei $f : N^n \rightarrow M^m$ in C^k mit $k > \max\{n - m, 0\}$.

Zeige:

- (i) Die Menge der kritischen Werte von f hat Lebesgue-Maß Null.
- (ii) $f^{-1}(y) \subset N^n$ ist für fast alle $y \in M^m$ eine differenzierbare Untermannigfaltigkeit der Kodimension m .
- (iii) Sei $f \in C^\infty$. Dann liegen die regulären Werte von f dicht in M^m .

Aufgabe 5 (Zusatz). (4 Punkte)

Sei $A \subset B$. Eine Retraktion ist eine stetige Abbildung $f : B \rightarrow A$, sodass $f|_A = \text{Id}$, also $f(x) = x$ für alle $x \in A$, gilt.

- (i) Zeige, dass es keine Retraktion von $\overline{B_1(0)} \subset \mathbb{R}^n$ auf \mathbb{S}^{n-1} gibt. *Hinweis:* Führe einen Widerspruchsbeweis. Sei $f : \overline{B_1(0)} \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ eine Retraktion. Betrachte die Glättung der Funktion

$$g(x) = \begin{cases} f\left(\frac{x}{|x|}\right) & 1/2 \leq |x| \leq 1 \\ f(2x) & 0 \leq |x| \leq 1/2. \end{cases}$$

Benutze dann Aufgabe 4.

- (ii) Brouwerscher Fixpunktsatz: Sei $f : \overline{B_1(0)} \rightarrow \overline{B_1(0)}$ stetig. Dann besitzt f einen Fixpunkt, d.h. es gibt ein $x \in \overline{B_1(0)}$ mit $f(x) = x$.

Abgabe: Bis Mittwoch, 14.11.2018, 10:00 Uhr, in die Mappe vor Büro F 402.