

Übungen zur Vorlesung Graphischer Mittlerer Krümmungsfluss

**Blatt 4**

**Aufgabe 11.** (4 Punkte)

Sei  $X_0(\mathbb{S}^2) = M_0 \subset \mathbb{R}^3$  eine Hyperfläche mit  $H > 0$ . Löse  $X : \mathbb{S}^2 \times [0, T) \rightarrow \mathbb{R}^3$  den inversen mittleren Krümmungsfluss

$$\frac{\partial X}{\partial t} = \frac{1}{H} \nu$$

mit Anfangswert  $X_0$ .

Berechne die Evolutionsgleichung von  $g_{ij}$ ,  $h_{ij}$ ,  $\frac{1}{H}$  und  $\det(g_{ij})$ .

**Aufgabe 12.** (4 Punkte)

Sei  $X_0(\mathbb{S}^2) = M_0 \subset \mathbb{R}^3$  eine sternförmige Hyperfläche mit  $H > 0$ . Löse  $X : \mathbb{S}^2 \times [0, T) \rightarrow \mathbb{R}^3$  den inversen mittleren Krümmungsfluss  $\frac{\partial X}{\partial t} = \frac{1}{H} \nu$  mit Anfangswert  $X_0$ . Sei  $M_t := X(\mathbb{S}^2, t)$ . Dann besagt ein nicht ganz einfach zu zeigendes Resultat, dass  $e^{-t/n} M_t$  glatt zu einer Kugel mit einem Radius  $R(M_0) > 0$  konvergiert.

Zeige, dass

$$E(M) := \frac{1}{|M|} \left( \int_M H \, d\mu \right)^2 \geq 16\pi$$

für sternförmige Hyperflächen  $M$  mit  $H > 0$  gilt.

*Hinweis:* Berechne zunächst  $\frac{\partial}{\partial t} E(M_t)$  unter dem inversen mittleren Krümmungsfluss. Glatte Konvergenz liefert hier insbesondere, dass  $E(e^{-t/n} M_t) \rightarrow E(\mathbb{S}_R^2)$  gilt.

**Aufgabe 13.** (4 Punkte)

Let  $X : \mathbb{S}^1 \times [0, T) \rightarrow \mathbb{R}^2$  eine Lösung des Curve Shortening Flows  $\frac{\partial}{\partial t} X = -\kappa \nu$ . Sei  $S \in \{\mathbb{S}, \mathbb{R}\}$  und  $T_\infty \in \{0, \infty\}$ .

Zeige

- (i) Es existiert eine Folge von Reskalierungen

$$(X_k : I_k \times J_k \rightarrow \mathbb{R}^2)_{k \in \mathbb{N}},$$

welche für  $k \rightarrow \infty$  gleichmäßig und glatt auf kompakten Teilmengen  $I \times J \subset S \times (-\infty, T_\infty)$  (mit  $0 \in I$ ) im Definitionsbereich und im umgebenen Raum zu einer maximalen, glatten Lösung  $X_\infty : S \times (-\infty, T_\infty) \rightarrow \mathbb{R}^2$  konvergiert, die wieder den Curve Shortening Flow erfüllt.

- (ii) Für eine Typ-I-Reskalierung um eine Typ-I-Singularität gilt  $T_\infty = 0$  und es existiert eine Zeit  $\tau_\infty \in \left[ -\frac{C_0^2}{4}, -\frac{1}{4} \right]$  so dass

$$X_\infty(0, \tau_\infty) \in B_{3C_0}(0), \quad |\kappa_\infty(0, \tau_\infty)| = 1 \quad \text{und} \quad \sup_{S \times (-\infty, -\delta^2]} |\kappa_\infty| \leq \frac{C_0}{\delta}$$

für alle  $\delta < 0$ .

(iii) Für eine Typ-II-Reskalierung um eine Typ-II-Singularität gilt  $T_\infty = \infty$  und

$$X_\infty(0, 0) = 0 \quad \text{und} \quad \sup_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} |\kappa_\infty| = |\kappa_\infty(0, 0)| = 1.$$

*Hinweis:* Benutze folgendes Resultat: Falls  $|\kappa| \leq C_0$  auf  $\mathbb{S}^1 \times [0, \bar{T}]$ , dann existiert für alle  $n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  eine Konstante  $C_{n,m} = C_{n,m}(C_0, X_0)$  sodass

$$\left| \frac{\partial^n}{\partial t^n} \frac{\partial^m \kappa}{\partial s^m} \right| \leq C_{n,m}$$

auf  $\mathbb{S}^1 \times [0, \bar{T}]$ .

**Aufgabe 14.** (4 Punkte)

Sei  $S \in \{\mathbb{S}^1, \mathbb{R}\}$  und  $X : S \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}^2$  eine Lösung des Curve Shortening Flow  $\frac{\partial}{\partial t} X = -\kappa \nu$ . Sei  $X_\infty : S \times (-\infty, T_\infty) \rightarrow \mathbb{R}^2$  eine Limeslösung nach einer Reskalierung um eine Singularität, wie in Aufgabe 13.

Zeige mit Hilfe von Theoremen 2 und 3:

(i) Es gilt

$$\frac{d}{dt} \int_{\Sigma_t} |\kappa| ds_t = -2 \sum_{\{\kappa(s,t)=0\}} \left| \frac{\partial \kappa}{\partial s}(s, t) \right|.$$

(ii) Seien  $\tau_1, \tau_2 \in (-\infty, T_\infty)$  mit  $\tau_1 < \tau_2$ . Dann gilt

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \sum_{\{\kappa_\infty(s,\tau)=0\}} \left| \frac{\partial \kappa_\infty}{\partial s}(s, \tau) \right| d\tau = 0.$$

(iii) Es gilt  $\kappa_\infty \neq 0$  auf  $S \times (-\infty, T_\infty)$ . Somit ist die Limeslösung  $X_\infty$  entweder strikt konkav oder strikt konvex.

**Theorem 2** (Fatous Lemma). Sei  $(\Omega, \sigma, d\mu)$  ein messbarer Raum und sei  $(f_i : \Omega \rightarrow [0, \infty))_{i \in \mathbb{N}}$  eine Folge integrierbarer Funktionen mit  $f \geq 0$  sodass  $\liminf_{i \rightarrow \infty} \int_\Omega f_i d\mu < \infty$  gilt. Dann gilt auch

$$\int_\Omega \liminf_{i \rightarrow \infty} f_i d\mu \leq \liminf_{i \rightarrow \infty} \int_\Omega f_i d\mu.$$

**Theorem 3** (Nullstellen der Krümmung). Sei  $S \in \{\mathbb{S}^1, \mathbb{R}\}$  und  $X : S \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}^2$  eine eingebettete Lösung des Curve Shortening Flow mit  $\kappa \neq 0$ . Sei  $t_0 \in (0, T)$ . Dann gilt für alle  $t \in (0, t_0)$ , dass die Menge

$$z(t) = \{p \in S \mid \kappa(p, t) = 0\}$$

endlich ist falls  $S = \mathbb{S}$  und abzählbar falls  $S = \mathbb{R}$ . Falls an einem Punkt  $(p_1, t_1) \in S \times (0, t_0)$  gilt, dass  $\kappa(p_1, t_1) = 0$  und  $\frac{\partial}{\partial s} \kappa(p_1, t_1) = 0$ , dann folgt:

- (i) Falls  $S = \mathbb{S}^1$ , dann ist  $\#z(t)$  streng monoton fallend für  $t \in (t_1, t_0)$ .
- (ii) Falls  $S = \mathbb{R}$ , dann existiert eine Umgebung  $U = [p_1 - \varepsilon, p_1 + \varepsilon] \times [t_1 - \delta, t_1 + \delta]$  so dass
  - $u(p_1 \pm \varepsilon, t) \neq 0$  für  $|t - t_1| \leq \delta$
  - $u(\cdot, t + \delta)$  hat höchstens eine Nullstelle in dem Intervall  $[p_1 - \varepsilon, p_1 + \varepsilon]$
  - $u(\cdot, t - \delta)$  hat mindestens zwei Nullstellen auf dem Intervall  $[p_1 - \varepsilon, p_1 + \varepsilon]$ .

**Abgabe:** Bis Donnerstag, 14.06.2018, 10.00 Uhr, in die Mappe vor Büro F 402.