Oliver Schnürer, Universität Konstanz Sommersemester 2018
Friederike Dittberner

Übungen zur Vorlesung Graphischer Mittlerer Kümmungsfluss

Blatt 3

Aufgabe 7. (4 Punkte)
Sei $\alpha \in (0,1)$. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $T > 0$, und $Q_T := \Omega \times (0,T)$. Sei $u : \bar{\Omega} \times [0,T) \to \mathbb{R}$ in $C^{2,\alpha;1,\frac{\alpha}{2}}(\bar{Q}_T)$ und $\varphi : \partial\Omega \times [0,T) \to \mathbb{R}$ in $C^{1,\alpha;0,\frac{\alpha}{2}}(\partial\Omega \times [0,T))$. Definiere

$$\Phi\colon C^{2+\alpha;\frac{2+\alpha}{2}}\left(\overline{Q}_1\right) \to C^{\alpha;\frac{\alpha}{2}}\left(\overline{Q}_1\right), \qquad u \mapsto \frac{\partial u}{\partial \nu} - \varphi\,.$$

Dann ist $\Phi \in C^1$ und es gilt

$$D\Phi(u)\langle \eta \rangle = D^2 u \langle D\eta, \nu \rangle\,.$$

Aufgabe 8. (4 Punkte)
Seien Ω, Q_T, u und φ wie in Aufgabe 7. Gelte

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \sqrt{1+|Du|^2}\,\operatorname{div}\left(\frac{Du}{\sqrt{1+|Du|^2}}\right) & \text{in } Q_T \\ u(\cdot,0) = u_0 & \text{in } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = \varphi & \text{in } \partial\Omega \times [0,T]\,. \end{cases}$$

(i) Beschreibe die Kompatibilitätsbedingungen der Ordnung 0, 1 und 2.
(ii) Definiere

$$V := \left\{ \eta \in C^{2+\beta,\frac{2+\beta}{2}}(\bar{Q}_1) \,:\, \eta|_{\Omega\times\{0\}} = 0 \right\},$$

$$W := \left\{ (\rho,\xi) \,:\, \rho \in C^{0+\beta,\frac{0+\beta}{2}}(\partial\Omega \times [0,T]), \xi \in C^{1+\beta,\frac{1+\beta}{2}}(Q_T), \xi|_{\partial\Omega\times\{0\}} = 0 \right\}$$

und $\Psi = (\Psi_1,\Psi_2) : V \to W$ mit

$$\Psi(\eta) = (\Psi_1(\eta),\Psi_2(\eta)) := \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} - F(D^2(\eta), D(\eta))), \frac{\partial \eta}{\partial \nu} - \varphi \right).$$

Zeige Kurzzeitexistenz für graphischen mittleren Krümmungsfluss mit Neumann-Randwerten. Benutze folgendes Theorem:

Theorem 1 (siehe Theorem IV.5.3, S. 320, Ladyzhenskaya et al., 68)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $T > 0$. Definiere $Q_T := \Omega \times (0,T)$. Seien $k \in \mathbb{N}$, $\alpha \in (0,1)$. Seien die Koeffizienten von*

$$L : u \mapsto \dot{u} - a^{ij}u_{ij} + b^i u_i + du$$

in $C^{k+\alpha;\frac{k+\alpha}{2}}(Q_T)$. Sei $\partial\Omega \in C^{k,\alpha}$ (im unbeschränkten Fall mit einer lokal gleichmäßigen $C^{k,a}$-Darstellung des Randes). Dann gibt es für beliebige $f \in C^{k+\alpha;\frac{k+\alpha}{2}}\left(\overline{Q}_T\right)$, beliebige $u_0 \in C^{k+2+\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$ und beliebige $\varphi \in C^{k+1+\alpha;\frac{k+1+\alpha}{2}}\left(\overline{Q}_T\right)$, die die Kompatibilitätsbedingungen bis zur Ordnung $\left[\frac{k+1+\alpha}{2}\right] = \left[\frac{k+1}{2}\right]$ erfüllen, eine Lösung $u \in C^{k+2+\alpha;\frac{k+2+\alpha}{2}}\left(\overline{Q}_T\right)$ des Randwertproblems

$$\begin{cases} Lu = f & \text{in } Q_T\,, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = \varphi & \text{auf } \partial\Omega \times [0,T]\,, \\ u(\cdot,0) = u_0 & \text{auf } \Omega\,. \end{cases}$$

Ist Ω beschränkt, so ist u unter allen $C^{2;1}(Q_T) \cap C^0\left(\overline{Q}_T\right)$-Lösungen eindeutig bestimmt. Es gilt die Abschätzung

$$\begin{aligned} &\|u\|_{C^{k+2+\alpha;\frac{k+2+\alpha}{2}}(\overline{Q}_T)} \\ &\le c \cdot \left(\|f\|_{C^{k+\alpha;\frac{k+\alpha}{2}}(\overline{Q}_T)} + \|u_0\|_{C^{k+2+\alpha}(\overline{\Omega})} + \|\varphi\|_{C^{k+1+\alpha;\frac{k+1+\alpha}{2}}(\overline{Q}_T)} \right) \end{aligned}$$

mit $c = c(\Omega, k, \alpha, L)$.

Aufgabe 9 (Divergenztheorem auf Mannigfaltigkeiten)**.** (4 Punkte)
Sei $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ eine glatte, kompakte, n-dimensionale Untermannigfaltigkeit. Sei v ein C^1-Vektorfeld in einer Umgebung von M. Definiere die Divergenz auf M durch

$$\operatorname{div}_M v = v^\alpha_{,\beta} g^{ij} X_i^\beta X_j^\gamma \delta_{\alpha\gamma}\,.$$

Zeige, dass

$$\int_M \operatorname{div}_M v \, d\mu = -\int_M \left\langle v, \vec{H} \right\rangle_{\mathbb{R}^{n+1}} \, d\mu$$

gilt.

Hinweis: Benutze eine Zerlegung der Eins.

Aufgabe 10 (Monotonieformel für den mittleren Krümmingsfluss)**.** (4 Punkte)
Für $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und $t_0 \in \mathbb{R}$, definiere $\Phi_{(x_0,t_0)} : \mathbb{R}^n \times (-\infty, t_0) \to \mathbb{R}$ durch

$$\Phi_{(x_0,t_0)}(x,t) := \frac{1}{(4\pi(t_0-t))^{n/2}} \exp\left(-\frac{\|x-x_0\|^2}{4(t_0-t)}\right)\,.$$

Sei M^n eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und $X : M^n \times (0,T) \to \mathbb{R}^{n+1}$ eine Lösung des mittleren Krümmungsflußes.

Zeige, dass

$$\frac{d}{dt}\int_{M_t} \Phi_{(x_0,t_0)} \, d\mu_t = -\int_{M_t} \left\| H(x,t) + \frac{(x-x_0)^\perp}{2(t_0-t)} \right\|^2 \Phi_{(x_0,t_0)} \, d\mu_t$$

für $t_0 \in (0,T]$ und $t \in (0,t_0)$ gilt, wobei $(x-x_0)^\perp := \langle x-x_0, \nu\rangle\nu$ der Normalenanteil des Vektors $x - x_0$ und $M_t := X(M^n, t)$ ist.

Hinweis: Zeige zunächst, dass $\operatorname{div}_{M_t} x = n$ gilt und benutze das Divergenztheorem für den Vektor $(x - x_0)\Phi(x_0, t_0)$.

Abgabe: Bis Donnerstag, 31.05.2018, 10.00 Uhr, in die Mappe vor Büro F 402.