

Übungen zur Vorlesung Differentialgeometrie II

Blatt 9

Aufgabe 31. (4 Punkte)

Seien X und Y Mannigfaltigkeiten und $Z \subset Y$ eine Untermannigfaltigkeit mit $\text{codim } Z = l$.
Seien $f : X \rightarrow Y$ und $g : Y \rightarrow \mathbb{R}^l$ in C^1 mit $Z = g^{-1}(0)$.

- (i) Zeige, dass $g \circ f$ genau dann eine Submersion in $x \in f^{-1}(Z)$ ist, genau dann wenn

$$f_{*,x}(T_x X) + T_{f(x)} Z = T_{f(x)} Y.$$

- (ii) f heißt *transversal* zu Z , falls (i) für alle $x \in f^{-1}(Z)$ gilt.
Zeige, dass $f^{-1}(Z) \subset X$ eine Untermannigfaltigkeit ist und, dass

$$\text{codim}(f^{-1}(Z)) = l$$

gilt.

Aufgabe 32. (4 Punkte)

Sei Y eine Mannigfaltigkeit. Seien W, Z Untermannigfaltigkeiten von Y mit $\dim W, \dim Z < \dim Y$,
die sich transversal schneiden, d. h. dass

$$T_x Y = T_x W + T_x Z$$

für alle $x \in W \cap Z$.

- (i) Zeige, dass $W \cap Z$ eine Untermannigfaltigkeit von Y bzw. Z ist und dass

$$\text{codim}(W \cap Z) = \text{codim}(W) + \text{codim}(Z)$$

bzw.

$$\text{codim}(W \cap Z) = \dim(W) - \dim(W \cap Z)$$

gilt.

- (ii) Finde ein Beispiel, das zeigt, dass $W \cap Z$ im Fall $T_x W \neq T_x Z$ für alle $x \in W \cap Z$ im
Allgemeinen keine Untermannigfaltigkeit von $Y = \mathbb{R}^4$ zu sein braucht.

Aufgabe 33. (4 Punkte)

Sei N eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. $A \subset N$ heißt Nullmenge, falls $\varphi(A)$ für eine höchstens abzählbare Menge von Kartenabbildungen eine Nullmenge ist, deren Kartenumgebungen N überdecken.

Seien M, N differenzierbare Mannigfaltigkeiten mit $\dim M < \dim N$. M besitze einen abzählbaren Atlas und $f : M \rightarrow N$ sei in C^1 .

Zeige, dass $f(M)$ eine Nullmenge ist.

Aufgabe 34 (Schwacher Einbettungssatz von Whitney). (4 Punkte)

Sei M eine kompakte Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^n mit $n > 2 \dim M + 1$.

Sei $\Delta = \{(x, y) \in M \times M : x = y\}$ und sei $\sigma : (M \times M) \setminus \Delta \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ definiert durch

$$\sigma(x, y) = \frac{x - y}{|x - y|}.$$

Zeige:

- (i) Es gibt $v \in \mathbb{S}^{n-1}$, $v^n \neq 0$ und $v \notin \overline{\text{Bild}(\sigma)}$.

Hinweis: Benutze Aufgabe 33.

- (ii) Definiert man die schiefe Projektion $P_v : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$ durch

$$P_v(x) = x - \frac{x^n}{v^n} v,$$

so kann man v so wählen, dass $P_v|_M$ eine differenzierbare Einbettung wird.

- (iii) Jede m -dimensionale kompakte differenzierbare Mannigfaltigkeit kann differenzierbar in den \mathbb{R}^{2m+1} eingebettet werden.

Hinweis: Benutze (i) und (ii).

Abgabe: Bis Donnerstag, 21.06.2018, 10.00 Uhr, in die Mappe vor Büro F 402.