

Übungen zur Vorlesung Differentialgeometrie II

**Blatt 6**

**Aufgabe 21.** (4 Punkte)

Sei  $n \geq 3$  und  $(M^n, g)$  eine Mannigfaltigkeit, so dass  $R_{ij} = fg_{ij}$  für eine Funktion  $f \in C^\infty(M)$  gilt. Zeige, dass

$$R_{ij} = \frac{R}{n} g_{ij}$$

gilt und dass  $R$  konstant ist.

**Aufgabe 22.** (12 Punkte)

Sei  $n = 3$  und  $M^n$  eine glatte Mannigfaltigkeit und  $g = g(t)$  eine Familie von Riemannschen Metriken, welche den Ricci-Fluss  $\partial_t g_{ij} = -2R_{ij}$  lösen. Nehme an, dass für  $x_0 \in M$  und  $t_0 \in \mathbb{R}$  eine Karte  $(U, \varphi)$  von  $M$  existiert, so dass

$$g_{ij}(x_0) = \delta_{ij}, \quad \Gamma_{ij}^k(x_0) = 0$$

gilt, wobei die Größen zur Zeit  $t_0$  ausgewertet werden. Definiere

$$B_{ijkl} = g^{pr} g^{qs} R_{piqj} R_{rksl}.$$

Zeige in dem oben gewählten Koordinatensystem:

- (i) Die Symmetrie

$$B_{ijkl} = B_{jilk} = B_{klij}$$

und

$$g^{jl}(B_{ijkl} - 2B_{ijlk}) = 0.$$

- (ii) Die Identität

$$\begin{aligned} & \Delta R_{ijkl} + 2(B_{ijkl} - B_{ijlk} - B_{iljk} + B_{ikjl}) \\ & = R_{jli;k} - R_{jk;l} - R_{il;jk} + R_{ik;jl} + g^{pq}(R_{pjkl}R_{qi} + R_{ipkl}R_{qj}). \end{aligned}$$

*Hinweis:* Benutze die 1. und die 2. Bianchi Identität, welche lautet:

$$R_{jklm;i} + R_{kilm;j} + R_{ijlm;k} = 0.$$

- (iii) Die Evolutionsgleichung des Riemannschen Krümmungstensors

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} R_{ijkl} & = \Delta R_{ijkl} + 2(B_{ijkl} - B_{ijlk} - B_{iljk} + B_{ikjl}) \\ & \quad + g^{pq}(R_{pjkl}R_{qi} + R_{ipkl}R_{qj} + R_{ijpl}R_{qk} + R_{ijkp}R_{ql}). \end{aligned}$$

- (iv) Die Evolutionsgleichung der Ricci-Krümmung

$$\frac{\partial}{\partial t} R_{ik} = \Delta R_{ik} + 2g^{pr} g^{qs} R_{piqk} R_{rs} - 2g^{pq} R_{pi} R_{qk}.$$

- (v) Die Evolutionsgleichung der Skalarkrümmung

$$\frac{\partial}{\partial t} R = \Delta R + 2g^{ij} g^{kl} R_{ik} R_{jl}.$$

- (vi) Falls  $R > 0$  zu Zeit  $t = 0$  gilt, dann gilt dies auch für  $t > 0$ .

**Abgabe:** Bis Donnerstag, 31.05.2018, 10.00 Uhr, in die Mappe vor Büro F 402.