Oliver Schnürer, Universität Konstanz Sommersemester 2018
Friederike Dittberner

Übungen zur Vorlesung Differentialgeometrie II

Blatt 5

Aufgabe 17. (4 Punkte)
Sei $\Omega \in \mathbb{R}^n$ offen, $x_0 \in \Omega$ und g_{ij} eine Metrik auf Ω.

Zeige, dass es eine offene Menge $\hat{\Omega}$ und einen Diffeomorphismus $\varphi : \hat{\Omega} \to \Omega$ gibt, sodass die zurückgezogene Metrik

$$\hat{g}_{ij} = (\varphi^* g)_{ij} := \varphi^k_i g_{kl} \varphi^l_j$$

in x_0

$$\hat{g}_{ij} = \delta_{ij}\,, \qquad \hat{g}_{ij,k} = 0 \quad \text{und} \quad \hat{\Gamma}^k_{ij} = 0$$

erfüllt.

Aufgabe 18 (Codazzi–Mainardi-Gleichungen)**.** (4 Punkte)
Zeige, dass

$$h_{ij,k} - h_{ik,j} = \Gamma^l_{ij} h_{lk} - \Gamma^l_{ik} h_{lj}$$

gilt, in einem Punkt, in dem $g_{ij} = \delta_{ij}$ gilt,

Aufgabe 19 (Simons' Identität)**.** (4 Punkte)
Zeige, dass

$$\Delta h_{ij} = H_{,ij} + H h_{ik} g^{kl} h_{lj} - |A|^2 h_{ij}$$

gilt, wobei $|A|^2 = h^l_k h^k_l$.

Aufgabe 20 (Hamiltons Trick)**.** (4 Punkte)
Seien $-\infty < a < b < \infty$ und $u : [a,b] \times (0,T) \to \mathbb{R}$ eine C^1-Funktion. Dann ist $u_{\max}(t) := \max_{x \in [a,b]} u(x,t)$ lokal Lipschitz in $(0,T)$.

Zeige, dass zu einer differenzierbaren Zeit $t \in (0,T)$

$$\frac{du_{\max}}{dt}(t) \le \sup \left\{ \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) \,:\, x \in [a,b] \text{ mit } u(x,t) = u_{\max}(t) \right\}.$$

Hinweis: Benutze die Mittelwertformel und dass jede Lipschitz-Funktion fast überall differenzierbar ist.

Abgabe: Bis Donnerstag, 24.05.2018, 10.00 Uhr, in die Mappe vor Büro F 402.