Oliver Schnürer, Universität Konstanz Sommersemester 2018
Friederike Dittberner

Übungen zur Vorlesung Differentialgeometrie II

Blatt 4

Aufgabe 13. (4 Punkte)
Sei $n = 3$.

(i) Stelle den Riemannschen Krümmungstensor mit Hilfe des Riccitensors und der Metrik dar.
(ii) Seien λ_i, $i = 1, 2, 3$, die Eigenwerte des Riccitensors bezüglich der Metrik. Sei Anti der Raum der antisymmetrischen $(0, 2)$-Tensoren,

$$\text{Anti} := \left\{(\eta_{ij})_{ij} : \eta_{ij} = -\eta_{ji} \text{ für alle } 1 \le i, j \le n\right\}.$$

Betrachte den Endomorphismus $f : \text{Anti} \to \text{Anti}$ mit

$$f : (\eta_{ij})_{ij} \mapsto \left(R_{ijkl} g^{kr} g^{ls} \eta_{rs}\right)_{ij}.$$

Zeige, dass f eine wohldefinierte Selbstabbildung ist und bestimme die Eigenwerte on f.
Hinweis: Betrachte zunächst den Fall $g_{ij} = \delta_{ij}$ in einem Punkt.

Aufgabe 14. (4 Punkte)
Finde Karten für den reell projektiven Raum $\mathbb{P}^n$.

Hinweis: Betrachte offene Umgebungen $U_i = \{x = (x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{P}^n : x_i \neq 0\}$.

Aufgabe 15. (4 Punkte)
Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und G eine Gruppe von Diffeomorphismen von M mit den folgenden Eigenschaften:

(a) Ist $\text{Id} \neq h \in G$, so besitzt h keinen Fixpunkt.
(b) Seien $x_n \in M$ und $g_n \in G$ mit $x_n \to x$, $g_n(x_n) \to y$ für $n \to \infty$, so existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ und $g \in G$ mit $g_n = g$ für alle $n \ge n_0$ (die Gruppe G operiert diskontinuierlich auf M)

oder

(b') G ist endlich.

Definiere eine Äquivalenzrelation "$\sim$" durch $x \sim y$, falls es ein $g \in G$ gibt mit $g(x) = y$ gibt. Sei $\bar{M} = M/G$ der Quotientenraum bezüglich der Relation.

Zeige:

(i) Die kanonische Projektion $p : M \to \bar{M}$ ist eine Überlagerung.
(ii) Es gibt genau eine differenzierbare Struktur auf $\bar{M}$, so dass p ein lokaler Diffeomorphismus wird.
(iii) Weise die Bedingungen (a) und (b) für den folgenden Fall nach: $M = \mathbb{R}^n$ und

$$G = \{g_q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n : g_q(x) = x + q \text{ für ein } q \in \mathbb{Z}^n\}.$$

Aufgabe 16. (4 Punkte)
Zeige, dass die reelle Grassmannsche Mannigfaltigkeit

$$\mathrm{Gr}_k(n) = \{V \subset \mathbb{R}^n : V \text{ ist ein } k\text{-dimensionaler Vektorraum}\}$$

eine Mannigfaltigkeit der Dimension $k(n-k)$ ist.

Abgabe: Bis Donnerstag, 17.05.2018, 10.00 Uhr, in die Mappe vor Büro F 402.