Oliver Schnürer, Friederike Dittberner | Universität Konstanz | Sommersemester 2018

Übungen zur Vorlesung Differentialgeometrie II

Blatt 12

Aufgabe 44. (6 Punkte)
Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit mit Metrik g_{ij} und $\tilde{M}$ eine differenzierbare Mannigfaltigkeit mit Metrik $\tilde{g}_{ij} := e^{-2u} g_{ij}$, wobei $u \in C^2(M)$.

Zeige:

(i)
$$\tilde{\Gamma}_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k - g^{kl}(g_{il}u_{,j} + g_{jl}u_{,i} - g_{ij}u_{,l})$$

(ii)
$$\begin{aligned} e^{2u}\tilde{R}_{ijkl} = {} & g_{ik}u_{;lj} - g_{il}u_{;kj} - g_{jk}u_{;li} + g_{jl}u_{;ki} \\ & + g_{ik}u_{;l}u_{;j} - g_{il}u_{;k}u_{;j} - g_{jk}u_{;l}u_{;i} + g_{jl}u_{;i}u_{;k} \\ & + g_{il}g_{jk}|\nabla u|^2 - g_{ik}g_{jl}|\nabla u|^2 + R_{ijkl} \end{aligned}$$

(iii)
$$\tilde{R}_{ik} = g_{ik}\Delta u + (n-2)u_{;ik} + u_{;i}u_{;k} - g_{ik}|\nabla u|^2 + R_{ik}$$

(iv)
$$\tilde{R} = e^{2u}(n-1)^2\Delta u - (n-2)|\nabla u|^2 + e^{2u}R$$

Aufgabe 45. (2 Punkte)
Sei $X\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ eine homothetisch schrumpfende Lösung des CSF zur Zeit $t = -\frac{1}{2}$ wobei $T = 0$ ist. Gelte also in einer lokalen graphischen Darstellung
$$u''(x) = \left(1 + u'(x)^2\right)(xu'(x) - u(x)).$$
Zeige, dass dann
$$E = \langle X, \nu\rangle e^{-\frac{1}{2}|X|^2}$$
konstant ist.

Aufgabe 46 (Hamiltons Harnack Ungleichung)**.** (4 Punkte)
Sei $\{\Sigma_t \subset \mathbb{R}^2\}_{t\in[0,T)}$ eine konvexe Lösung des Curve Shortening Flows. Sei $t_0 \in (0,T)$.

Zeige, dass
$$\frac{\kappa_t}{\kappa} - \frac{\kappa_s^2}{\kappa^2} + \frac{1}{2(t-t_0)} \geq 0$$
für $t \in (t_0, T)$ gilt.

Hinweis: Betrachte $f := \log\kappa$ und $F := (t-t_0)(f_s^2 - f_t)$. Berechne die Differenz $F_{ss} - F_t$ und betrachte sie an einem Maximum.

Aufgabe 47 (Translatierende Lösungen)**.** (4 Punkte)
Sei $\{\Sigma_t \subset \mathbb{R}^2\}_{t\in(-\infty,\infty)}$ eine strikt konvexe Lösung des Curve Shortening Flows sodass die Krümmung κ einen kritischen Punkt irgendwo in Raum und Zeit annimmt.

(i) Zeige, dass Σ_t eine translatierende Lösung sein muss, d. h. es gibt einen Vektor $V \in \mathbb{R}^2$ mit $\Sigma_t = \Sigma_0 + tV$.
Hinweis: Folgere zunächst mit Aufgabe 46, dass hier
$$Z := \frac{\kappa_t}{\kappa} - \frac{\kappa_s^2}{\kappa^2} \equiv 0\,.$$
Betrachte dann das Vektorfeld
$$V = -\frac{\kappa_s}{\kappa}\tau + \kappa\nu$$
wobei τ Tangetialvektor und ν Normale an Σ_t sind.

(ii) Zeige außerdem, dass Σ_t der Grim Reaper ist.
Hinweis: Zeige zunächst, dass Σ_t sich als Graph schreiben lässt. Arbeite dann mit dieser Darstellung.

Abgabe: Bis Donnerstag, 12.07.2018, 10.00 Uhr, in die Mappe vor Büro F 402.