Oliver Schnürer, Universität Konstanz Sommersemester 2018
Friederike Dittberner

Übungen zur Vorlesung Differentialgeometrie II

Blatt 11

Aufgabe 39. (2 Punkte)
Sei M eine differenzierbare C^∞-Mannigfaltigkeit und seien X, Y, Z drei C^2-Vektorfelder. Dann gilt die Jacobiidentität

$$[X,[Y,Z]]+[Y,[Z,X]]+[Z,[X,Y]]=0.$$

Aufgabe 40. (2 Punkte)
$T(M\times N)$ ist (in natürlicher Weise) diffeomorph zu $TM\times TN$.

Aufgabe 41. (4 Punkte)
Seien (M,g) und (N,h) zwei Riemannsche Mannigfaltigkeiten. Für Vektoren X und Y definieren wir die Schnittkrümmung

$$K(X,Y):=\frac{R_{ijkl}X^iY^jX^kY^l}{|X|^2|Y|^2-\langle X,Y\rangle^2}.$$

Wir betrachten die Produktmannigfaltigkeit $W=M\times N$ mit der Produktmetrik

$$G((v_1,u_1),(v_2,u_2))=g(v_1,v_2)+h(u_1,u_2)$$

für $(v_i,u_i)\in T(M\times N)=TM\times TN$.

(i) Wenn M und N beide positive Schnittkrümmung haben, gilt dies dann auch für W?
Hinweis: Betrachte $M=N=\mathbb{S}^2$.
(ii) Wenn M und N beide positive Ricci-Krümmung haben, gilt dies dann auch für W?

Aufgabe 42. (4 Punkte)
Sei (B^n_R,g) mit

$$g_{ij}(y):=\frac{4R^4}{(R^2-|y|^2)^2}\delta_{ij}$$

das Poincaré-Modell des hyperbolischen Raumes.

Berechne den Riemannschen Krümmungstensor R_{ijkl}, die Ricci-Krümmung R_{ij}, die Skalarkrümmung R und die Schnittkrümmungen $K(X,Y)$ im Poincaré-Modell des hyperbolischen Raumes.

Aufgabe 43. (4+4 Punkte)
Seien A, B topologische Räume, $C\subset B$ und $g:C\to A$ eine stetige Abbildung. Dann definieren wir die Verklebung von A und B entlang g durch

$$A\cup_g B:=A\,\dot\cup\,B/\sim,$$

wobei $\sim$ die kleinste Äquivalenzrelation auf $A\,\dot\cup\,B$ mit $x\sim g(x)$ für alle $x\in C$ ist.

Sei M^n eine Mannigfaltigkeit und $f:\{-1,1\}\times B_2(0)\to M^n$ eine glatte Einbettung. Definiere für $C=\{-1,1\}\times\partial B_1(0)\subset[-1,1]\times\partial B_1(0)$,

$$N:=\big(M^n\setminus f\big(\{-1,1\}\times B_1(0)\big)\big)\cup_{f|_C}\big([-1,1]\times\partial B_1(0)\big).$$

Zeige, dass N die Struktur einer glatten Mannigfaltigkeit besitzt.

Zusatz: Wir haben in der Aufgabe benutzt, dass

$$\partial\big(\mathbb{S}^0 \times D^3\big) = \mathbb{S}^0 \times \mathbb{S}^2 = \partial\big(D^1 \times \mathbb{S}^2\big)$$

gilt und $D^3 \times \mathbb{S}^0$ "herausgeschnitten" und $\mathbb{S}^2 \times D^1$ "eingeklebt". Diese Konstruktion heißt zusammenhängende Summe.

Sei $1 \leq k \leq n$. Benutze nun bei der k-Chirurgie, dass

$$\partial\Big(\mathbb{S}^k \times D^{n-k}\Big) = \mathbb{S}^k \times \mathbb{S}^{n-k-1} = \partial\Big(D^{k+1} \times \mathbb{S}^{n-k-1}\Big)$$

gilt, schneide $\mathbb{S}^k \times D^{n-k}$ heraus und klebe $D^{k+1} \times \mathbb{S}^{n-k-1}$ ein. Definiere k-Chirurgie formal und zeige, dass der bei der k-Chirurgie aus einer glatten Mannigfaltigkeit entstehende topologische Raum wieder die Struktur einer glatten Mannigfaltigkeit besitzt.

Abgabe: Bis Donnerstag, 05.07.2018, 10.00 Uhr, in die Mappe vor Büro F 402.