Oliver Schnürer, Friederike Dittberner Universität Konstanz Sommersemester 2018

Übungen zur Vorlesung Differentialgeometrie II

Blatt 1

Aufgabe 1. (4 Punkte)
Bestimme auf dem durch die Gleichung

$$\beta(x^2 + y^2) = z^2$$

mit $z \neq 0$ und $\beta > 0$ im $\mathbb{R}^3$ definierten Kegel Geodätische, die keine Geradenstücke sind. Benutze dabei eine lokale Isometrie zu $\mathbb{R}^2$ für eine Vermutung über das Aussehen dieser Geodätischen.

Aufgabe 2 (Existenz und Eindeutigkeit maximaler Geodätischen)**.** (4 Punkte)
Formuliere und beweise Theorem 13.5 für höhere Kodimensionen.

Aufgabe 3 (Geodätisch vollständige Untermannigfaltigkeiten)**.** (4 Punkte)
Formuliere und beweise Theorem 13.9 für höhere Kodimensionen.

Aufgabe 4. (4 Punkte)
Geodätische auf der $\mathbb{S}^2$ sind gegeben durch

$$\alpha_\varphi(t) = (\cos t, \sin t \cos \varphi, \sin t \sin \varphi)\,.$$

Zeige, dass die Parallelverschiebung von $X(0) = e_3$ entlang α_φ von φ abhängt.

Abgabe: Bis Donnerstag, 26.04.2018, 10.00 Uhr, in die Mappe vor Büro F 402.

Oliver Schnürer, Friederike Dittberner Universität Konstanz Sommersemester 2018

Übungen zur Vorlesung Differentialgeometrie II

Blatt 2

Aufgabe 5. (4 Punkte)
Der Halbraum $\{x^n > 0\} \subset \mathbb{R}^n$ mit der Metrik

$$\frac{dx_1^2 + \ldots + dx_n^2}{x_n^2}$$

heißt hyperbolischer Raum.

Alternative: Der offene Ball $B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$ mit der Metrik

$$4\frac{dx_1^2 + \cdots + dx_n^2}{\left(1 - x_1^2 - \cdots - x_n^2\right)^2}$$

heißt ebenfalls hyperbolischer Raum.

Bestimme alle maximalen Geodätischen im hyperbolischen Raum.

Aufgabe 6. (4 Punkte)
Sei $M \subset \mathbb{R}^{n+m}$ eine m-dimensionale Untermannigfaltigkeit.

Folgere aus der Definition $\ddot{\alpha}(t) \in (T_{\alpha(t)}M)^\perp$ und einer gewöhnlichen Differentialgleichung, dass die Geodätischen auf M auch in beliebiger Kodimension nur von der Metrik auf M abhängen und nicht von der Immersion.

Aufgabe 7. (4 Punkte)
Zeige, dass die Schwarzschildsche Metrik

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)dt^2 + \frac{1}{1 - \frac{r_s}{r}}dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

die Einsteinschen Feldgleichungen im Vacuum

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 0$$

löst.

Aufgabe * 8. (4 Punkte)
Zeige, dass der räumliche Anteil der Schwarzschildschen Metrik bei $\{t = \text{konstant}\}$

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)dt^2 + \frac{1}{1 - \frac{r_s}{r}}dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

eine isometrische Inversion am Ereignishorizont $\partial B_{m/2}(0)$ besitzt.

Hinweis: Betrachte einen Schnitt entlang der r-Koordinate und zeige, dass sich dieser als Graph darstellen lässt.

Abgabe: Bis Donnerstag, 03.05.2018, 10.00 Uhr, in die Mappe vor Büro F 402.

Oliver Schnürer, Universität Konstanz Sommersemester 2018
Friederike Dittberner

Übungen zur Vorlesung Differentialgeometrie II

Blatt 3

Aufgabe 9. (4 Punkte)
Arbeite die Details aus Bemerkung 14.7 aus:

Bestimme, ohne Verwendung der zweiten Fundamentalform, den Riemannschen Krümmungstensor einer n-Sphäre vom Radius $r > 0$.

Zeige, dass n-dimensionale Sphären vom Radius $\sqrt{r^2 - 2(n-1)t}$ für $t \in \left[0, \frac{r^2}{2(n-1)}\right)$ den Riccifluss $\frac{\partial}{\partial_t} g_{ij} = -2R_{ij}$ lösen.

Hinweis: Benutze z. B. die stereographische Projektion um die Metrik der Einheitesphäre zu berechnen (vgl. DG I, Aufgabe 12).

Aufgabe 10. (4 Punkte)
Sei N eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. N heißt orientierbar, wenn es eine Familie von Karten von N gibt, deren Definitionsbereiche N überdecken, so dass die Determinante der Jacobi-Matrix der Kartenwechsel stets positiv ist.

Sei nun $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ eine Untermannigfaltigkeit. Wir sagen, dass M als Hyperfläche orientierbar ist, wenn es eine stetige Normale auf M gibt, d. h. es existiert eine stetige Abbildung $\nu : M \to \mathbb{R}^{n+1}$, so dass für $p \in M$ der Vektor $\nu(p) \in (T_pM)^\perp$ ist und $|\nu(p)| = 1$ erfüllt.

Zeige, dass eine C^2-Untermannigfaltigkeit M genau dann als Mannigfaltigkeit orientierbar ist, wenn sie als Untermannigfaltigkeit orientierbar ist.

Aufgabe 11. (4 Punkte)
Sei M eine m-dimensionale Mannigfaltigkeit. Eine Teilmenge $N \subset M$ heißt n-dimensionale C^k-Untermannigfaltigkeit von M, wenn es zu jedem $x \in N$ eine offene Umgebung $U \subset M$ und eine Karte $\varphi : U \to \varphi(U) \subset \mathbb{R}^{m+n}$ mit

$$\varphi(U \cap N) = \varphi(U) \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\})$$

gibt. Ein solches N besitzt einen C^k-Atlas, nämlich $A := \{(U \cap N, \varphi|_{U \cap N}) : (U, \varphi) \text{ wie oben}\}$.

(i) Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Definiere die Abbildung

$$\Delta : M \to M \times M, \quad x \mapsto (x, x).$$

Zeige, dass $\Delta(M)$ eine Untermannigfaltigkeit von $M \times M$ ist.

(ii) Sei $M = \{x \in \mathbb{R}^4 : x_1^2 + x_2^2 = x_3^2 + x_4^2 = 1\}$. Zeige, dass M eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^4$ ist.

Aufgabe 12. (4 Punkte)
Seien M^m und N^n differenzerbare Mannigfaltigkeiten.

Zeige, dass
$$R_{\mu\nu}^{M\times N} = \begin{pmatrix} R_{ij}^M & 0 \\ 0 & R_{kl}^N \end{pmatrix}$$
für $1 \leq \mu, \nu \leq n + m$, $1 \leq i, j \leq m$ und $1 \leq k, l \leq n$ gilt.

Abgabe: Bis Donnerstag, 10.05.2018, 10.00 Uhr, in die Mappe vor Büro F 402.

Oliver Schnürer, Friederike Dittberner Universität Konstanz Sommersemester 2018

Übungen zur Vorlesung Differentialgeometrie II

Blatt 4

Aufgabe 13. (4 Punkte)
Sei $n = 3$.

(i) Stelle den Riemannschen Krümmungstensor mit Hilfe des Riccitensors und der Metrik dar.
(ii) Seien λ_i, $i = 1, 2, 3$, die Eigenwerte des Riccitensors bezüglich der Metrik. Sei Anti der Raum der antisymmetrischen $(0, 2)$-Tensoren,
$$\text{Anti} := \left\{ (\eta_{ij})_{ij} : \eta_{ij} = -\eta_{ji} \text{ für alle } 1 \le i, j \le n \right\}.$$
Betrachte den Endomorphismus $f : \text{Anti} \to \text{Anti}$ mit
$$f : (\eta_{ij})_{ij} \mapsto \left(R_{ijkl} g^{kr} g^{ls} \eta_{rs} \right)_{ij}.$$
Zeige, dass f eine wohldefinierte Selbstabbildung ist und bestimme die Eigenwerte on f.
Hinweis: Betrachte zunächst den Fall $g_{ij} = \delta_{ij}$ in einem Punkt.

Aufgabe 14. (4 Punkte)
Finde Karten für den reell projektiven Raum $\mathbb{P}^n$.

Hinweis: Betrachte offene Umgebungen $U_i = \{x = (x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{P}^n : x_i \neq 0\}$.

Aufgabe 15. (4 Punkte)
Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und G eine Gruppe von Diffeomorphismen von M mit den folgenden Eigenschaften:

(a) Ist $\text{Id} \neq h \in G$, so besitzt h keinen Fixpunkt.
(b) Seien $x_n \in M$ und $g_n \in G$ mit $x_n \to x$, $g_n(x_n) \to y$ für $n \to \infty$, so existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ und $g \in G$ mit $g_n = g$ für alle $n \ge n_0$ (die Gruppe G operiert diskontinuierlich auf M)

oder

(b') G ist endlich.

Definiere eine Äquivalenzrelation "$\sim$" durch $x \sim y$, falls es ein $g \in G$ gibt mit $g(x) = y$ gibt. Sei $\bar{M} = M/G$ der Quotientenraum bezüglich der Relation.

Zeige:

(i) Die kanonische Projektion $p : M \to \bar{M}$ ist eine Überlagerung.
(ii) Es gibt genau eine differenzierbare Struktur auf $\bar{M}$, so dass p ein lokaler Diffeomorphismus wird.
(iii) Weise die Bedingungen (a) und (b) für den folgenden Fall nach: $M = \mathbb{R}^n$ und
$$G = \{g_q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n : g_q(x) = x + q \text{ für ein } q \in \mathbb{Z}^n\}.$$

Aufgabe 16. (4 Punkte)
Zeige, dass die reelle Grassmannsche Mannigfaltigkeit

$$\mathrm{Gr}_k(n) = \{V \subset \mathbb{R}^n \,:\, V \text{ ist ein } k\text{-dimensionaler Vektorraum}\}$$

eine Mannigfaltigkeit der Dimension $k(n-k)$ ist.

Abgabe: Bis Donnerstag, 17.05.2018, 10.00 Uhr, in die Mappe vor Büro F 402.

Oliver Schnürer, Universität Konstanz Sommersemester 2018
Friederike Dittberner

Übungen zur Vorlesung Differentialgeometrie II

Blatt 5

Aufgabe 17. (4 Punkte)
Sei $\Omega \in \mathbb{R}^n$ offen, $x_0 \in \Omega$ und g_{ij} eine Metrik auf Ω.

Zeige, dass es eine offene Menge $\hat{\Omega}$ und einen Diffeomorphismus $\varphi : \hat{\Omega} \to \Omega$ gibt, sodass die zurückgezogene Metrik

$$\hat{g}_{ij} = (\varphi^* g)_{ij} := \varphi_i^k g_{kl} \varphi_j^l$$

in x_0

$$\hat{g}_{ij} = \delta_{ij}\,, \qquad \hat{g}_{ij,k} = 0 \quad \text{ und } \quad \hat{\Gamma}_{ij}^k = 0$$

erfüllt.

Aufgabe 18 (Codazzi–Mainardi-Gleichungen)**.** (4 Punkte)
Zeige, dass

$$h_{ij,k} - h_{ik,j} = \Gamma_{ij}^l h_{lk} - \Gamma_{ik}^l h_{lj}$$

gilt, in einem Punkt, in dem $g_{ij} = \delta_{ij}$ gilt,

Aufgabe 19 (Simons' Identität)**.** (4 Punkte)
Zeige, dass

$$\Delta h_{ij} = H_{,ij} + H h_{ik} g^{kl} h_{lj} - |A|^2 h_{ij}$$

gilt, wobei $|A|^2 = h_k^l h_l^k$.

Aufgabe 20 (Hamiltons Trick)**.** (4 Punkte)
Seien $-\infty < a < b < \infty$ und $u : [a,b] \times (0,T) \to \mathbb{R}$ eine C^1-Funktion. Dann ist $u_{\max}(t) := \max_{x\in[a,b]} u(x,t)$ lokal Lipschitz in $(0,T)$.

Zeige, dass zu einer differenzierbaren Zeit $t \in (0,T)$

$$\frac{du_{\max}}{dt}(t) \le \sup \left\{ \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) \,:\, x \in [a,b] \text{ mit } u(x,t) = u_{\max}(t) \right\}.$$

Hinweis: Benutze die Mittelwertformel und dass jede Lipschitz-Funktion fast überall differenzierbar ist.

Abgabe: Bis Donnerstag, 24.05.2018, 10.00 Uhr, in die Mappe vor Büro F 402.

Oliver Schnürer, Universität Konstanz Sommersemester 2018
Friederike Dittberner

Übungen zur Vorlesung Differentialgeometrie II

Blatt 6

Aufgabe 21. (4 Punkte)
Sei $n \geq 3$ und (M^n, g) eine Mannigfaltigkeit, so dass $R_{ij} = f g_{ij}$ für eine Funktion $f \in C^\infty(M)$ gilt. Zeige, dass

$$R_{ij} = \frac{R}{n}\, g_{ij}$$

gilt und dass R konstant ist.

Aufgabe 22. (12 Punkte)
Sei $n = 3$ und M^n eine glatte Mannigfaltigkeit und $g = g(t)$ eine Familie von Riemannschen Metriken, welche den Ricci-Fluss $\partial_t g_{ij} = -2R_{ij}$ lösen. Nehme an, dass für $x_0 \in M$ und $t_0 \in \mathbb{R}$ eine Karte (U, φ) von M existiert, so dass

$$g_{ij}(x_0) = \delta_{ij}\,, \qquad \Gamma^k_{ij}(x_0) = 0$$

gilt, wobei die Größen zur Zeit t_0 ausgewertet werden. Definiere

$$B_{ijkl} = g^{pr} g^{qs} R_{piqj} R_{rksl}\,.$$

Zeige in dem oben gewählten Koordinatensystem:

(i) Die Symmetrie

$$B_{ijkl} = B_{jilk} = B_{klij}$$

und

$$g^{jl}(B_{ijkl} - 2B_{ijlk}) = 0\,.$$

(ii) Die Identität

$$\begin{aligned}\Delta R_{ijkl} &+ 2(B_{ijkl} - B_{ijlk} - B_{iljk} + B_{ikjl}) \\ &= R_{jl;ik} - R_{jk,il} - R_{il;jk} + R_{ik;jl} + g^{pq}(R_{pjkl}R_{qi} + R_{ipkl}R_{qj})\,.\end{aligned}$$

Hinweis: Benutze die 1. und die 2. Bianchi Identität, welche lautet:

$$R_{jklm;i} + R_{kilm;j} + R_{ijlm;k} = 0\,.$$

(iii) Die Evolutionsgleichung des Riemannschen Krümmungstensors

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} R_{ijkl} &= \Delta R_{ijkl} + 2(B_{ijkl} - B_{ijlk} - B_{iljk} + B_{ikjl}) \\ &\quad + g^{pq}(R_{pjkl}R_{qi} + R_{ipkl}R_{qj} + R_{ijpl}R_{qk} + R_{ijkp}R_{ql})\,.\end{aligned}$$

(iv) Die Evolutionsgleichung der Ricci-Krümmung

$$\frac{\partial}{\partial t} R_{ik} = \Delta R_{ik} + 2g^{pr}g^{qs}R_{piqk}R_{rs} - 2g^{pq}R_{pi}R_{qk}\,.$$

(v) Die Evolutionsgleichung der Skalarkrümmung

$$\frac{\partial}{\partial t} R = \Delta R + 2g^{ij}g^{kl}R_{ik}R_{jl}\,.$$

(vi) Falls $R > 0$ zu Zeit $t = 0$ gilt, dann gilt dies auch für $t > 0$.

Abgabe: Bis Donnerstag, 31.05.2018, 10.00 Uhr, in die Mappe vor Büro F 402.

Oliver Schnürer, Friederike Dittberner Universität Konstanz Sommersemester 2018

Übungen zur Vorlesung Differentialgeometrie II

Blatt 7

Aufgabe 23. (2 Punkte)
Zeige, dass die Gleichung für Geodätische,

$$\ddot{\alpha}^k + \dot{\alpha}^i \dot{\alpha}^j \Gamma^k_{ij} \circ \alpha = 0\,,$$

eine Tensorgleichung ist.

Aufgabe 24. (2 Punkte)
Sei S ein (r,r)-Tensor.

Zeige, dass $\det(S)$ ein Skalar ist.

Aufgabe 25 (Zusammenhangskoeffizienten)**.** (4 Punkte)
Beweise Lemma 17.22.

Aufgabe 26 (Vertauschen zweiter kovarianter Ableitungen)**.** (8 Punkte)
Beweise Lemma 17.25.

Abgabe: Bis Donnerstag, 07.06.2018, 10.00 Uhr, in die Mappe vor Büro F 402.

Oliver Schnürer, Friederike Dittberner Universität Konstanz Sommersemester 2018

Übungen zur Vorlesung Differentialgeometrie II

Blatt 8

Aufgabe 27. (4 Punkte)
Gib zwei nicht homöomorphe $\mathbb{R}$-Bündel über $\mathbb{S}^1$ an.

Aufgabe 28. (4 Punkte)

(i) Seien M, N, S differenzierbare Mannigfaltigkeiten und $f : M \to N$, sowie $g : N \to S$ differenzierbare Abbildungen.
Zeige, dass
$$g_* \circ f_* = (g \circ f)_*$$
gilt.

(ii) Sei M eine differenzierbare Untermannigfaltigkeit von N.
Zeige, dass TM eine Untermannigfaltigkeit von TN ist.

Aufgabe 29. (4 Punkte)
Seien M, N differenzierbare Mannigfaltigkeiten und sei $f : M \to N$ ein Diffeomorphismus.

Zeige, dass $f_* : TM \to TN$ ein Diffeomorphismus ist.

Aufgabe 30. (4 Punkte)
Seien (M, g) und $(N, \tilde{g})$ glatte Riemannsche Mannigfaltigkeiten und sei $\varphi : M \to N$ ein Diffeomorphismus, mit der Eigenschaft, dass für alle glatten Kurven $\gamma : [0, 1] \to M$
$$L_g(\gamma) = L_{\tilde{g}}(\varphi \circ \gamma)$$
gilt, wobei
$$L_g(\gamma) := \int_0^1 \sqrt{g(\dot{\gamma}(s), \dot{\gamma}(s))}\,\mathrm{ds}$$
ist. Ein Diffeomorphismus mit dieser Eigenschaft wird als Isometrie zwischen M und N bezeichnet.

Zeige, dass
$$\varphi^* \tilde{g} = g$$
gilt.

Abgabe: Bis Donnerstag, 14.06.2018, 10.00 Uhr, in die Mappe vor Büro F 402.

Oliver Schnürer, Universität Konstanz Sommersemester 2018
Friederike Dittberner

Übungen zur Vorlesung Differentialgeometrie II

Blatt 9

Aufgabe 31. (4 Punkte)
Seien X und Y Mannigfaltigkeiten und $Z \subset Y$ eine Untermannigfaltigkeit mit $\operatorname{codim} Z = l$. Seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to \mathbb{R}^l$ in C^1 mit $Z = g^{-1}(0)$.

(i) Zeige, dass $g \circ f$ genau dann eine Submersion in $x \in f^{-1}(Z)$ ist, genau dann wenn

$$f_{*,x}(T_x X) + T_{f(x)} Z = T_{f(x)} Y\,.$$

(ii) f heißt *transversal* zu Z, falls (i) für alle $x \in f^{-1}(Z)$ gilt.
Zeige, dass $f^{-1}(Z) \subset X$ eine Untermannigfaltigkeit ist und, dass

$$\operatorname{codim}(f^{-1}(Z)) = l$$

gilt.

Aufgabe 32. (4 Punkte)
Sei Y eine Mannigfaltigkeit Seien W, Z Untermannigfaltigkeiten von Y mit $\dim W, \dim Z < \dim Y$, die sich transversal schneiden, d. h. dass

$$T_x Y = T_x W + T_x Z$$

für alle $x \in W \cap Z$.

(i) Zeige, dass $W \cap Z$ eine Untermannigfaltigkeit von Y bzw. Z ist und dass

$$\operatorname{codim}(W \cap Z) = \operatorname{codim}(W) + \operatorname{codim}(Z)$$

bzw.

$$\operatorname{codim}(W \cap Z) = \dim(W) - \dim(W \cap Z)$$

gilt.

(ii) Finde ein Beispiel, dass zeigt, dass $W \cap Z$ im Fall $T_x W \neq T_x Z$ für alle $x \in W \cap Z$ im Allgemeinen keine Untermannigfaltigkeit von $Y = \mathbb{R}^4$ zu sein braucht.

Aufgabe 33. (4 Punkte)
Sei N eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. $A \subset N$ heißt Nullmenge, falls $\varphi(A)$ für eine höchstens abzählbare Menge von Kartenabbildungen eine Nullmenge ist, deren Kartenumgebungen N überdecken.

Seien M, N differenzierbare Mannigfaltigkeiten mit $\dim M < \dim N$. M besitze einen abzählbaren Atlas und $f : M \to N$ sei in C^1.

Zeige, dass $f(M)$ eine Nullmenge ist.

Aufgabe 34 (Schwacher Einbettungssatz von Whitney)**.** (4 Punkte)
Sei M eine kompakte Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ mit $n > 2\dim M + 1$.
Sei $\Delta = \{(x, y) \in M \times M : x = y\}$ und sei $\sigma : (M \times M) \setminus \Delta \to \mathbb{S}^{n-1}$ definiert durch

$$\sigma(x, y) = \frac{x - y}{|x - y|}\,.$$

Zeige:

(i) Es gibt $v \in \mathbb{S}^{n-1}$, $v^n \neq 0$ und $v \notin \overline{\mathrm{Bild}(\sigma)}$.
Hinweis: Benutze Aufgabe 33.

(ii) Definiert man die schiefe Projektion $P_v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$ durch

$$P_v(x) = x - \frac{x^n}{v^n} v\,,$$

so kann man v so wählen, dass $P_v|_M$ eine differenzierbare Einbettung wird.

(iii) Jede m-dimensionale kompakte differenzierbare Mannigfaltigkeit kann differenzierbar in den $\mathbb{R}^{2m+1}$ eingebettet werden.
Hinweis: Benutze (i) und (ii).

Abgabe: Bis Donnerstag, 21.06.2018, 10.00 Uhr, in die Mappe vor Büro F 402.

Oliver Schnürer, Universität Konstanz Sommersemester 2018
Friederike Dittberner

Übungen zur Vorlesung Differentialgeometrie II

Blatt 10

Aufgabe 35. (4 Punkte)
Beweise das Rangtheorem, Theorem 18.16:

Sei $f : M^m \to N^n$ eine Abbildung die in jedem Punkt den Rang k hat. Dann gibt es für jeden Punkt $p \in M$ Karten (U, φ) und (V, ψ) von M bzw. N mit $p \in U$, $f(p) \in V$ und $f(U) \to V$, so dass

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}\big(x^1, \ldots, x^m\big) = \big(x^1, \ldots, x^k, 0, \ldots, 0\big)\,.$$

Hinweis: Benutze die Diffeomorphismen

$$\varphi\big(x^1, \ldots, x^m\big) = \Big(f^1\big(x^1, \ldots, x^m\big), \ldots, f^k\big(x^1, \ldots, x^m\big), x^{k+1}, \ldots, x^m\Big)$$

und

$$\psi^{-1}\big(y^1, \ldots, y^k, y^{k+1}, \ldots, y^m\big) = \Big(y^1, \ldots, y^k, y^{k+1} + \bar{f}^{k+1}\big(y^1, \ldots, y^k\big), \ldots, y^n + \bar{f}^n\big(y^1, \ldots, y^k\big)\Big)$$

für geeigntetes $\bar{f}$.

Aufgabe 36. (4 Punkte)
Zeige, dass das Tangentialbündel $T\mathbb{S}^3$ ein triviales Vektorbündel ist.

Aufgabe 37. (4 Punkte)
Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine m-dimensionale Untermannigfaltigkeit.

(i) Definiere Untervektorbündel.
(ii) Zeige, dass TM ein Untervektorbündel des trivialen Bündels $M \times \mathbb{R}^n$ ist.
(iii) Sei
$$NM := \bigcup_{x \in M} \{x\} \times (T_xM)^\perp$$
die disjunkte Vereinigung der Normalenräume von M.
Finde eine Unterbündelstruktur für NM bezüglich $M \times \mathbb{R}^n$.

Aufgabe 38. (4 Punkte)
Sei $\Sigma_k \subset B_R(0) \subset \mathbb{R}^2$ eine Folge von eingebetteten, geschlossenen Kurven mit gleichmäßig beschränkter Krümmung, d. h. es existiert ein $C > 0$ sodass $|\kappa_k(p)| \le C$ für alle $p \in \mathbb{S}^1$ und alle $k \in \mathbb{N}$.

Zeige, dass jede Limeskurve Σ_∞ eingebettet ist.

Abgabe: Bis Donnerstag, 28.06.2018, 10.00 Uhr, in die Mappe vor Büro F 402.

Oliver Schnürer, Universität Konstanz Sommersemester 2018
Friederike Dittberner

Übungen zur Vorlesung Differentialgeometrie II

Blatt 11

Aufgabe 39. (2 Punkte)
Sei M eine differenzierbare C^∞-Mannigfaltigkeit und seien X, Y, Z drei C^2-Vektorfelder. Dann gilt die Jacobiidentität
$$[X,[Y,Z]]+[Y,[Z,X]]+[Z,[X,Y]]=0.$$

Aufgabe 40. (2 Punkte)
$T(M\times N)$ ist (in natürlicher Weise) diffeomorph zu $TM\times TN$.

Aufgabe 41. (4 Punkte)
Seien (M,g) und (N,h) zwei Riemannsche Mannigfaltigkeiten. Für Vektoren X und Y definieren wir die Schnittkrümmung
$$K(X,Y):=\frac{R_{ijkl}X^iY^jX^kY^l}{|X|^2|Y|^2-\langle X,Y\rangle^2}.$$
Wir betrachten die Produktmannigfaltigkeit $W=M\times N$ mit der Produktmetrik
$$G((v_1,u_1),(v_2,u_2))=g(v_1,v_2)+h(u_1,u_2)$$
für $(v_i,u_i)\in T(M\times N)=TM\times TN$.

(i) Wenn M und N beide positive Schnittkrümmung haben, gilt dies dann auch für W?
Hinweis: Betrachte $M=N=\mathbb{S}^2$.
(ii) Wenn M und N beide positive Ricci-Krümmung haben, gilt dies dann auch für W?

Aufgabe 42. (4 Punkte)
Sei (B^n_R,g) mit
$$g_{ij}(y):=\frac{4R^4}{(R^2-|y|^2)^2}\delta_{ij}$$
das Poincaré-Modell des hyperbolischen Raumes.

Berechne den Riemannschen Krümmungstensor R_{ijkl}, die Ricci-Krümmung R_{ij}, die Skalarkrümmung R und die Schnittkrümmungen $K(X,Y)$ im Poincaré-Modell des hyperbolischen Raumes.

Aufgabe 43. (4+4 Punkte)
Seien A, B topologische Räume, $C\subset B$ und $g:C\to A$ eine stetige Abbildung. Dann definieren wir die Verklebung von A und B entlang g durch
$$A\cup_g B:=A\,\dot\cup\,B/\sim,$$
wobei $\sim$ die kleinste Äquivalenzrelation auf $A\,\dot\cup\,B$ mit $x\sim g(x)$ für alle $x\in C$ ist.

Sei M^n eine Mannigfaltigkeit und $f:\{-1,1\}\times B_2(0)\to M^n$ eine glatte Einbettung. Definiere für $C=\{-1,1\}\times\partial B_1(0)\subset[-1,1]\times\partial B_1(0)$,
$$N:=\big(M^n\setminus f\big(\{-1,1\}\times B_1(0)\big)\big)\cup_{f|_C}\big([-1,1]\times\partial B_1(0)\big).$$

Zeige, dass N die Struktur einer glatten Mannigfaltigkeit besitzt.

Zusatz: Wir haben in der Aufgabe benutzt, dass

$$\partial\big(\mathbb{S}^0 \times D^3\big) = \mathbb{S}^0 \times \mathbb{S}^2 = \partial\big(D^1 \times \mathbb{S}^2\big)$$

gilt und $D^3 \times \mathbb{S}^0$ “herausgeschnitten” und $\mathbb{S}^2 \times D^1$ “eingeklebt”. Diese Konstruktion heißt zusammenhängende Summe.

Sei $1 \leq k \leq n$. Benutze nun bei der k-Chirurgie, dass

$$\partial\Big(\mathbb{S}^k \times D^{n-k}\Big) = \mathbb{S}^k \times \mathbb{S}^{n-k-1} = \partial\Big(D^{k+1} \times \mathbb{S}^{n-k-1}\Big)$$

gilt, schneide $\mathbb{S}^k \times D^{n-k}$ heraus und klebe $D^{k+1} \times \mathbb{S}^{n-k-1}$ ein. Definiere k-Chirurgie formal und zeige, dass der bei der k-Chirurgie aus einer glatten Mannigfaltigkeit entstehende topologische Raum wieder die Struktur einer glatten Mannigfaltigkeit besitzt.

Abgabe: Bis Donnerstag, 05.07.2018, 10.00 Uhr, in die Mappe vor Büro F 402.

Oliver Schnürer, Universität Konstanz Sommersemester 2018
Friederike Dittberner

Übungen zur Vorlesung Differentialgeometrie II

Blatt 12

Aufgabe 44. (6 Punkte)
Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit mit Metrik g_{ij} und $\tilde{M}$ eine differenzierbare Mannigfaltigkeit mit Metrik $\tilde{g}_{ij} := e^{-2u} g_{ij}$, wobei $u \in C^2(M)$.

Zeige:

(i)
$$\tilde{\Gamma}^k_{ij} = \Gamma^k_{ij} - g^{kl}(g_{il}u_{,j} + g_{jl}u_{,i} - g_{ij}u_{,l})$$

(ii)
$$\begin{aligned} e^{2u}\tilde{R}_{ijkl} = {} & g_{ik}u_{;lj} - g_{il}u_{;kj} - g_{jk}u_{;li} + g_{jl}u_{;ki} \\ & + g_{ik}u_{;l}u_{;j} - g_{il}u_{;k}u_{;j} - g_{jk}u_{;l}u_{;i} + g_{jl}u_{;i}u_{;k} \\ & + g_{il}g_{jk}|\nabla u|^2 - g_{ik}g_{jl}|\nabla u|^2 + R_{ijkl} \end{aligned}$$

(iii)
$$\tilde{R}_{ik} = g_{ik}\Delta u + (n-2)u_{;ik} + u_{;i}u_{;k} - g_{ik}|\nabla u|^2 + R_{ik}$$

(iv)
$$\tilde{R} = e^{2u}(n-1)^2\Delta u - (n-2)|\nabla u|^2 + e^{2u}R$$

Aufgabe 45. Sei M^n eine n-dimensionale, zusammenhängende, differenzierbare Mannigfaltigkeit, deren Topologie eine abzählbare Basis besitzt.

(i) Sei g eine pseudo-Riemannsche Metrik auf M, $p \in M$ beliebig und $V_1, \ldots, V_n$ eine Orthonormalbasis von T_pM. Sei $\varepsilon_j := g_p(V_j, V_j)$.
Zeige, dass der Index von g mit der Anzahl der negativen Vorzeichen, welche in $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ vorkommen,übereinstimmt.

(ii) Zeige, dass eine Metrik vom Index k, $1 \le k \le n$, genau dann existiert, wenn es ein k-dimensionales Unterbündel von TM gibt.

Aufgabe 46. Seien M, N differenzierbare C^∞-Mannigfaltigkeiten und sei $f : M \to N$ ein Diffeomorphismus. Seien X, Y zwei C^1-Vektorfelder auf M und definiere für $q \in N$ ein Vektorfeld auf N mittels
$$\hat{X}|_q = (f_* X)|_{f^{-1}(q)}.$$
Zeige, dass für $p \in M$
$$f_{*,p}[X,Y]|_p = \left[\hat{X}, \hat{Y}\right]\Big|_{f(p)}$$
gilt.

Aufgabe 47. Seien (M, g), $(N, \tilde{g})$ glatte Riemannsche Mannigfaltigkeiten und $\varphi : M \to N$ eine Isometrie. Bezeichne mit ∇, $\tilde{\nabla}$ und R, $\tilde{R}$ jeweils den Riemannschen Zusammenhang bzw. die Riemannsche Krümmung auf M bzw. N.

(i) Zeige, dass für glatte Vektorfelder X, Y auf M
$$\varphi_*(\nabla_X Y) = \tilde{\nabla}_{\varphi_* X}(\varphi_* Y)$$
gilt.

(ii) Zeige, dass für glatte Vektorfelder X, Y, Z auf M
$$\varphi_*(R(X,Y)Z) = \tilde{R}(\varphi_* X, \varphi_* Y)\varphi_* Z$$
gilt.

Aufgabe 48. Versehe $\mathbb{S}^n$ mit dem induzierten Zusammenhang ∇.

(i) Sei X durch
$$X(p) := e_1 - \langle e_1, p\rangle\, p$$
definiert, wobei e_1 den Basisvektor im $\mathbb{R}^{n+1}$ bezeichnet und $p \in S^n$ sei. Begründe, warum X ein Vektorfeld auf $\mathbb{S}^n$ ist und berechne die Darstellung von X bezüglich der stereographischen Projektion.

(ii) Berechne die Christoffelymbole Γ_{ij}^k in lokalen Koordinaten bezüglich der stereographischen Projektion.

Aufgabe 49. (4 Punkte)
Beweise Lemma 22.6:

Seien M und N differenzierbare Mannigfaltigkeiten und $f : M \to N$ eine Immersion. Sei g eine Riemannsche Metrik auf N. Dann ist f^*g, die zurückgezogene ("pull-back") Metrik, definiert durch
$$f^*g(X,Y) := g(f_*X, f_*Y) \quad \text{oder} \quad f^*g(X,Y)(p) = g(f_{*,p}X|_p, f_{*,p}Y|_p)$$
für Vektorfelder X, Y auf M eine Riemannsche Metrik auf M.

Aufgabe 50. Sei M eine C^{k+1}-Mannigfaltigkeit, $k \geq 1$, mit abzählbarer Basis.

(i) Sei g wie im Beweis von Theorem 9.4 definiert.
Zeige, dass g eine Riemannsche Metrik der Klasse C^k ist.

(ii) Zeige, dass ein Zusammenhang der Klasse C^{k-1} auf M existiert.

Aufgabe 51. Sei M eine glatte Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$, g die induzierte Metrik und ∇ der induzierte Zusammenhang.

Zeige, dass ∇ der eindeutig bestimmte Levi-Civita Zusammenhang auf (M, g) ist.

Aufgabe 52. Sei M eine C^{k+1}-Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$, $k \geq 1$. Seien X, Y beliebige Vektorfelder der Klasse C^{k-1} respektive C^k auf M, wobei wir Y als Abbildung $Y : M \to \mathbb{R}^n$ auffassen. Definiere
$$\nabla_X Y(z) := P(z)dY(z)\langle X\rangle,$$
wobei $P(z) : \mathbb{R}^n \to T_zM$ die orthogonale Projektion ist, $z \in M$ beliebig sei und wir Y lokal fortsetzen zu einer Abbildung $Y : U \to \mathbb{R}^n$, U eine offene Umgebung von z des $\mathbb{R}^n$.

Zeige, dass ∇ einen Zusammenhang der Klasse C^{k-1} auf M definiert, den induzierten Zusammenhang.

Aufgabe 53. (4 Punkte)

Aufgabe 54. (4 Punkte)

Aufgabe 55. (4 Punkte)

Aufgabe 56. (4 Punkte)

Abgabe: Bis Donnerstag, 12.07.2018, 10.00 Uhr, in die Mappe vor Büro F 402.

Oliver Schnürer, Universität Konstanz Sommersemester 2018
Friederike Dittberner

Übungen zur Vorlesung Differentialgeometrie II

Blatt 13

Aufgabe 57. Sei M eine differenzierbare Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{n+1}$ und bezeichne mit R den Krümmungstensor. Berechne R bezüglich des Projektionszusammenhanges für

(1) $M = \mathbb{S}^n$,
(2) $M = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^k$, $1 \le k \le n-1$,
(3) $M = \{(x, |x|) : x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\}$.

Aufgabe 58. Lies den Beweis von Bemerkung 9.5, also der Existenz einer untegeordneten Zerlegung der Eins auf einer parakompakten Mannigfaltigkeit, nach.

Aufgabe 59. (Konvexe Hülleneigenschaft) (4 Punkte)
Sei $F \in C^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$ eine reguläre Fläche mit $X(\Omega) \subset \overline{B_R(0)}$. Es gebe ein $x \in \Omega$ mit $|X(x)| = R$. Zeigen Sie:

(i) Bei geeigneter Wahl der Normalen ν gilt $X(x) = R\nu(x)$.
(ii) Bezüglich der Normalen in (i) hat X in x Hauptkrümmungen $\kappa_1, \kappa_2 \ge 1/R$.

Sei jetzt $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ beschränkt und $X \in C^2(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^3)$, so dass $X|_\Omega$ reguläre Fläche mit Gaußscher Krümmung $K \le 0$ ist. Zeige, dass $X(\bar{\Omega})$ in der konvexen Hülle von $X(\partial\Omega)$ enthalten ist, wobei

$$\operatorname{conv}(X(\partial\Omega)) = \bigcap_{X(\partial\Omega) \subset B_R(p)} B_R(p)\,.$$

Aufgabe 60. (4 Punkte)
Berechne die Tangentialräume der folgenden Untermannigfaltigkeiten M_i, $i \in \{1,2,3\}$, in allen Punkten von M_i. Berechne weiterhin die Normalen in allen Punkten der Flächen M_1 und M_2.

(i) Sei $M_1 := \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$.
(ii) Sei $M_2 := \{x \in \mathbb{R}^3 : \operatorname{dist}(x, \mathbb{S}^1 \times \{0\}) = \frac{1}{4}\}$.
(iii) Sei $M_3 := O(n) \subset \mathbb{R}^{n \times n}$.

Abgabe: Bis Donnerstag, 08.02.2018, 10.00 Uhr, in die Mappe vor Büro F 402.