Oliver Schnürer, Friederike Dittberner Universität Konstanz Wintersemester 2017/2018

Übungen zur Vorlesung Differentialgeometrie I

Blatt 8

Aufgabe 28. (2 Punkte)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Sei $X : \Omega \to \mathbb{R}^{n+1}$ eine C^2-Abbildung und $\varphi, \psi \in C_c^\infty(X(\Omega, \mathbb{R})$. Zeige, dass

$$\int_\Omega \varphi \Delta_g \psi \, d\mu = \int_\Omega \langle \nabla\varphi, \nabla\psi\rangle_g \, d\mu$$

gilt, wobei $\langle \nabla\varphi, \nabla\psi\rangle_g := \varphi_i g^{ij} \psi_j$ ist.

Aufgabe 29. (2 Punkte)
Seien $X : \Omega \to \mathbb{R}^{n+1}$ und $\hat{X} : \hat{\Omega} \to \mathbb{R}^{n+1}$ Immersionen und $\varphi : \Omega \to \hat{\Omega}$ ein Diffeomorphismus mit $X = \hat{X} \circ \varphi$. Seien $f : \Omega \to \mathbb{R}$ und $\hat{f} : \hat{\Omega} \to \mathbb{R}$ mit $f = \hat{f} \circ \varphi$, so gilt

$$\Delta_g f = \left(\Delta_{\hat{g}} \hat{f}\right) \circ \varphi \, .$$

Hinweis: Benutze Aufgabe 28 oder führe eine längere Rechnung durch.

Aufgabe 30. (4 Punkte)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Sei $X : \Omega \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^{n+1}$ eine C^2-Abbildung. Sei $X(\cdot, t)$ für alle $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ eine Immersion. Nehme an, dass es ein $F : \Omega \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$ mit $\frac{\partial}{\partial t} X = -F\nu$ gibt. Die zweite kovariante Abbildung einer Funktion $f \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$ ist durch $f_{;ij} = f_{,ij} - f_k \Gamma^k_{ij}$ definiert.
Zeige, dass

$$\frac{\partial h_{ij}}{\partial t} = F_{;ij} - F h_i^k h_{kj}$$

gilt.

Hinweis: Zeige zunächst, dass für die Christoffelsymbole $\Gamma^k_{ij} = g^{kl} X^\alpha_l \delta_{\alpha\beta} X^\beta_{,ij}$ gilt. Differenziere dann die Definition der zweiten Fundamentalform.

Aufgabe 31. (Zweite Variation des Flächeninhaltes) (4 Punkte)
Seien die Voraussetzungen wie in Theorem 6.5. Sei $\frac{\partial}{\partial t} X = -F\nu$ für eine C^2-Funktion $F : \Omega \times (\varepsilon_0, \varepsilon_0) \to \mathbb{R}$. Zeige, dass

$$\frac{d}{dt} \mathcal{A}(X(\cdot, t)) = -\int_\Omega F H \, d\mu$$

für alle $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ gilt und, falls $X(\cdot, 0)$ eine Minimalfläche ist,

$$\left.\frac{d^2}{dt^2} \mathcal{A}(X(\cdot, t))\right|_{t=0} = -\int_\Omega F \left(\Delta_g F + |A|^2 F\right) \, d\mu = \int_\Omega |\nabla F|_g^2 - |A|^2 F^2 \, d\mu$$

gilt.

Aufgabe 32. (4+2 Punkte)
Es bezeichne $O(n) = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} : A^T A = \mathbb{1}\}$ den Raum der orthogonalen $n \times n$-Matrizen, wobei $\mathbb{1}$ die Einheitsmatrix ist. Für $A, B \in O(n)$ definieren wir die Multiplikationsabbildung $m : O(n) \times O(n) \to O(n)$ durch $m(A, B) = A \cdot B$ sowie die Inversenabbildung $i : O(n) \to O(n)$ durch $i(A) = A^{-1}$.

(i) Zeige, dass $O(n)$ eine C^∞-Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{n\times n}$ ist.
(ii) Gib $T_{\mathbb{1}} O(n)$ an.
(iii) Zeige, dass es eine offene Umgebung U von $O(n)$ und C^∞-Abbildungen $M : U \times U \to \mathbb{R}^{n\times n}$ und $I : U \to \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $M|_{O(n)\times O(n)} = m$ und $I|_{O(n)} = i$ gibt.

Bemerkung: Eine C^1-Mannigfaltigkeit G versehen mit einer Gruppenstruktur, so dass die Multiplikation $m : G \times G \to G$, $(a, b) \mapsto a \cdot b$, sowie die Inversion $i : G \to G$, $a \mapsto a^{-1}$, in einem geeigneten Sinne differenzierbar sind, bezeichnet man als *Lie-Gruppe*.

Abgabe: Bis Donnerstag, 21.12.2017, 10.00 Uhr, in die Mappe vor Büro F 402.