Oliver Schnürer, Universität Konstanz Wintersemester 2017/2018
Friederike Dittberner

Übungen zur Vorlesung Differentialgeometrie I

Blatt 7

Aufgabe 24. (4 Punkte)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ und $X : \Omega \to \mathbb{R}^{n+1}$ eine C^1-Immersion. Zeige:

(i) $X_i^\alpha g^{ij} X_j^\beta \delta_{\alpha\gamma}$ ist die orthogonale Projektion $\mathbb{R}^{n+1} \to T_{X(x)}X(\Omega)$ für $x \in \mathbb{R}^n$.
(ii) $X_i^\alpha g^{ij} X_j^\beta = \delta^{\alpha\beta} - \nu^\alpha \nu^\beta$.
(iii) $n = X_i^\alpha g^{ij} X_j^\beta \delta_{\alpha\beta}$ ($\equiv |\nabla X|^2$).

Aufgabe 25. (4 Punkte)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt mit glattem Rand. Sei $u \in C^2(\Omega)$ und $\varphi \in C_c^2(\Omega)$. Dann definieren wir den Flächeninhalt von $\operatorname{graph} u$ durch

$$\mathcal{A}(\operatorname{graph} u) := \int_\Omega \sqrt{1 + |Du|}\, dx = \int_\Omega \sqrt{\det g_{ij}}\, dx\,.$$

Gelte $H = 0$. Dann folgt für alle $\varphi \in C_c^2(\Omega)$,

$$\mathcal{A}[u] \le \mathcal{A}[u + \varphi]\,.$$

Hinweis: Wende den Gaußschen Divergenzsatz auf eine geeignete Fortsetzung des Normalenvektors an.

Aufgabe 26. (4 Punkte)
Sei M eine kompakte, sternförmige C^2-Hyperfläche im $\mathbb{R}^{n+1}$, d. h. es gibt ein $u \in C^2\left(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}\right)$, ohne Einschränkung positiv homogen vom Grade 1 mit $u > 0$, so dass

$$M = \{(x \cdot u(x)) : x \in \mathbb{S}^n\}$$

gilt. Gib eine lokale Einbettung X von M in den $\mathbb{R}^{n+1}$ an und berechne die induzierte Metrik g_{ij}, die zweite Fundamentalform h_{ij} und die Normale ν von M. Zeige außerdem, dass $\langle X, \nu \rangle > 0$ gilt.

Aufgabe 27. (Weierstraßdarstellung für Minimalflächen) (4 Punkte)
Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet. Seien $\varphi, \psi : \Omega \to \mathbb{C}$ analytisch (d.h. komplex differenzierbar). Definiere $F : \Omega \to \mathbb{C}^3$ durch

$$F^1 = \frac{1}{2}\varphi(1 - \psi^2)\,, \quad F^2 = \frac{i}{2}\varphi(1 + \psi^2)\,, \quad F^3 = \varphi\psi$$

und $X : \Omega \to \mathbb{R}^3$ durch

$$X(z) = \operatorname{Re} \int_{z_0}^{z} F(\zeta)\, d\zeta\,.$$

(i) Zeige, dass $F \cdot F = (F^1)^2 + (F^2)^2 + (F^3)^2 = 0$ gilt.
(ii) Zeige, dass X eine Minimalfläche ist, d. h. zeige, dass X immersiert ist und mittlere Krümmung Null hat.
(iii) Finde φ und ψ, sodass die dazugehörige Weierstraßdarstellung das Katenoid liefert (bis auf Isometrien).

Abgabe: Bis Mittwoch, 13.12.2017, 18.00 Uhr, in die Mappe vor Büro F 402.