Oliver Schnürer, Friederike Dittberner
Universität Konstanz
Wintersemester 2017/2018

Übungen zur Vorlesung Differentialgeometrie I

Blatt 4

Aufgabe 11. (4 Punkte)
Für festes $\tau \in \mathbb{R}$ sei

$$F_\tau : (u,v) \mapsto \begin{pmatrix} \cos\tau \sin u \sinh v + \sin\tau \cos u \cosh v \\ -\cos\tau \cos u \sinh v + \sin\tau \sin u \cosh v \\ u\cos\tau + v \sin\tau \end{pmatrix}, \quad u \in (-\pi,\pi),\ v \in \mathbb{R}.$$

(i) Skizziere die Fäche F_0, genannt Helikoid, und die Fläche $F_{\pi/2}$, genannt Katenoid.
(ii) Bestimme die erste Fundamentalform von F_τ.
(iii) Zeige für eine glatte Kurve $\gamma : I \to (-\pi,\pi)\times\mathbb{R}$, dass

$$\frac{d}{d\tau} L\left(F_\tau \circ \gamma\right) = 0\,,$$

was bedeutet, dass es eine lokale Deformation des Helikoids in das Katenoid durch Isometrien gibt.

Aufgabe 12. (Stereographische Projektion) (4 Punkte)
Sei $\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\|^2 = 1\}$ and $e_{n+1} = (0,\ldots,0,1)$.

(i) Zeige, dass $\mathbb{S}^n \setminus \{e_{n+1}\}$ eine n-dimensionale Hyperfläche mit Parametrisierung $X : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ ist, wobei

$$X(x) := \frac{1}{\|x\|^2+1}\left(2x, \|x\|^2 - 1\right)\,, \qquad x \in \mathbb{R}^n\,.$$

Berechne die Metrik $(g_{ij}(x))$, die zweite Fundamentalform $(h_{ij}(x))$ für $x \in \mathbb{R}^n$ und zeige, dass X konform ist (also $(g_{ij}) = \lambda^2(\delta_{ij})$ mit $\lambda > 0$).
(ii) Sei Γ die Menge aller Geraden im $\mathbb{R}^n$. Zeige, dass

$$\sup_{\gamma\in\Gamma} L(X\circ\gamma) < \infty\,.$$

(iii) Bestimme die *stereographische Projektion* $X^{-1} : \mathbb{S}^n \setminus \{e_{n+1}\} \to \mathbb{R}^n$.

Aufgabe 13. (4 Punkte)

(i) Sei $X : B_1^n(0) \to \mathbb{R}$ mit

$$X(x) := \left(x, \sqrt{1-\|x\|^2}\right)\,.$$

Berechne die erste und zweite Fundamentalform.
(ii) Sei $X : \mathbb{R}^n \to \mathbb{S}^n$ eine beliebige Immersion. Vergleiche die erste und zweite Fundamentalform.
(iii) Sei $X : \mathbb{R}^n \to \mathbb{S}^n_r$ für $r > 0$ eine beliebige Immersion. Vergleiche die erste und zweite Fundamentalform g^r_{ij} und h^r_{ij} miteinander und mit g^1_{ij} und h^1_{ij} für eine geeignet gewählte Immersion $Y : \mathbb{R}^n \to \mathbb{S}^n$.

Aufgabe 14. (4 Punkte)
Zeige, dass der Kegel $K := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = k^2 z^2, z > 0\}$ lokal isometrisch zum $\mathbb{R}^2$ ist. Was ist die Relevanz dieser Aussage für Schultütenhersteller?
Hinweis: Die Abbildung $Y : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$Y(h, \varphi) := \begin{pmatrix} kh\cos\varphi \\ kh\sin\varphi \\ h \end{pmatrix}$$

ist eine Parametrisierung von K. Setze $u = \alpha h \cos(\beta\varphi)$ und $v = \alpha h \sin(\beta\varphi)$. Finde $\alpha(k)$ und $\beta(k)$, sodass die Abbildung $X : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ mit $X(u, v) := Y(h(u, v), \varphi(u, v))$ eine isometrische Parametrisierung von K ist.

Abgabe: Bis Donnerstag, 23.11.2017, 10.00 Uhr, in die Mappe vor Büro F 402.