Oliver Schnürer, Universität Konstanz Wintersemester 2017/2018
Friederike Dittberner

Übungen zur Vorlesung Differentialgeometrie I

Blatt 3

Aufgabe 7. (2 Punkte)
Sei $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte C^2-Kurve mit $\kappa(s) > 0$ für alle $s \in I$. Eine Normalenlinie durch $\alpha(s)$ ist eine Gerade in Richtung der Normalen an $\alpha(s)$. Zeige, dass genau dann alle Normalenlinien von α durch einen fixen Punkt gehen, wenn α ein Kreis ist.

Aufgabe 8. (2 Punkte)
Sei $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte C^2-Kurve mit $\kappa(0) \neq 0$. Für $q \in \mathbb{R}^2$ und $r > 0$ definiere $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $f(t) := \|\alpha(t) - q\|^2 - r^2$. Zeige, dass genau dann q der Mittelpunkt und r der Radius des Schmiegekreises an $\alpha(0)$ ist, wenn $f(0) = f'(0) = f''(0) = 0$ gilt.

Aufgabe 9. (8 Punkte)
Sei $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine periodische, nach der Bogenlänge parametrisierte C^2-Kurve mit Periode P und Länge $L = \int_0^P \|\alpha'(s)\|\, ds = P$, sodass die Normale $\nu : [0, L) \to \mathbb{S}^1$ bijektiv ist und $\kappa(s) > 0$ für alle $s \in \mathbb{R}$.

(i) Zeige, dass für alle $s, t \in \mathbb{R}$
$$\nu(s) = \begin{pmatrix} \cos\vartheta(s,t) & -\sin\vartheta(s,t) \\ \sin\vartheta(s,t) & \cos\vartheta(s,t) \end{pmatrix} \nu(t)$$
mit
$$\vartheta(s,t) = \int_t^s \kappa(\sigma)\, d\sigma$$
gilt. *Hinweis: Benutze die Frenet-Gleichungen.*

(ii) Zeige, dass es eine Parametertransformation $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit
$$\nu(\varphi(\vartheta)) = -\begin{pmatrix} \cos\vartheta \\ \sin\vartheta \end{pmatrix}$$
gibt.

(iii) Definiere die Stützfunktion $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch
$$u(\vartheta) := \left\langle -\begin{pmatrix} \cos\vartheta \\ \sin\vartheta \end{pmatrix}, \alpha(\varphi(\vartheta)) \right\rangle .$$
Zeige, dass
$$u(\vartheta) = \sup_{s\in\mathbb{R}} \left\langle \alpha(s), -\begin{pmatrix} \cos\vartheta \\ \sin\vartheta \end{pmatrix} \right\rangle .$$

(iv) Zeige, dass
$$\kappa(\varphi(\vartheta)) = \frac{1}{u(\vartheta) + u_{\vartheta\vartheta}(\vartheta)} .$$

(v) Definiere
$$\beta(\vartheta) := -u(\vartheta) \begin{pmatrix} \cos\vartheta \\ \sin\vartheta \end{pmatrix} + u_\vartheta(\vartheta) \begin{pmatrix} \sin\vartheta \\ -\cos\vartheta \end{pmatrix} .$$
Zeige, dass $\alpha(\varphi(\vartheta)) = \beta(\vartheta)$.

Aufgabe 10. (4 Punkte)

(i) Sei $\Omega := (0,\infty) \times (0,2\pi) \times (0,\pi)$. Wir definieren die Abbildung

$$X : \Omega \to \mathbb{R}^3, \quad (r,\varphi,\vartheta) \mapsto (r\cos\varphi\sin\vartheta, r\sin\varphi\sin\vartheta, r\cos\vartheta).$$

Zeige, dass die Abbildung X eine injektive Immersion ist und berechne die erste Fundamentalform sowie $A_g(\{r\} \times (0,2\pi) \times (0,\pi))$.

(ii) Sei $\alpha\colon (a,b) \to \left\{x \in \mathbb{R}^3\colon x^2 = 0 \text{ und } x^1 > 0\right\}$ eine Kurve in der „rechten" Halbebene der (x^1,x^3)-Ebene. Schreibe

$$\alpha(t) = (r(t), 0, h(t))\,..$$

Wir nehmen an, dass α eine Einbettung ist. Durch Rotation um die x^3-Achse erhalten wir eine Fläche $X\colon (a,b) \times (0,2\pi) \to \mathbb{R}^3$ mit

$$X(t,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r(t) \\ 0 \\ h(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(t)\cos\varphi \\ r(t)\sin\varphi \\ h(t) \end{pmatrix}.$$

Zeige, dass X eine Einbettung ist. Berechne außerdem die erste Fundamentalform dieser Parametrisierung und zeige, dass

$$A_g((a,b) \times [0,2\pi)) = 2\pi \int_a^b r(t)dt.$$

Abgabe: Bis Donnerstag, 16.11.2017, 10.00 Uhr, in die Mappe vor Büro F 402.