Oliver Schnürer, Universität Konstanz Wintersemester 2017/2018
Friederike Dittberner

Übungen zur Vorlesung Differentialgeometrie I

Blatt 2

Aufgabe 3. (4 Punkte)
Sei $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $M = \operatorname{graph} u$.

(i) Sei $\lambda > 0$. Finde eine Funktion $v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit

$$\operatorname{graph} v = \lambda \cdot M\,.$$

(ii) Sei $n = 2$ und $(M_t)_{t\in\mathbb{R}}$ eine Familie von Mengen sodass $M_k = \operatorname{graph} u$ für alle $k \in \mathbb{Z}$. Die Mengen M_t rotieren mit konstanter Winkelgeschwindigkeit um die x_3-Achse, so dass bei dieser Rotation die positive x_1-Achse bei $t = 1/4$ auf die positive x_2-Achse abgebildet wird. Bestimme $v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit

$$\operatorname{graph} v(\cdot, t) = M_t\,.$$

(iii) Sei $a \in \mathbb{R}^n$ und T eine Translation mit $T(0) = a$. Bestimme $v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit

$$\operatorname{graph} v = T \operatorname{graph} u\,.$$

Aufgabe 4. (4 Punkte)
Sei $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte C^1-Kurve, d. h. gelte $\|\gamma'(t)\| = 1$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Dann „lässt sich die Kurve lokal als Graph darstellen“.

(i) Präzisiere die Formulierung und beweise die Aussage.
(ii) Ist γ zusätzlich injektiv und periodisch, so funktioniert die Darstellbarkeit auch lokal um Punkte im Bild. Präzisiere dies ebenfalls und beweise es.

Aufgabe 5. (Wohldefiniertheit der orientierten Krümmung) (4 Punkte)
Sei $\alpha \in C^2\big(I, \mathbb{R}^2\big)$ nach der Bogenlänge parametrisiert. Dann definieren wir die (orientierte) Krümmung $\kappa : I \to \mathbb{R}$ von α durch

$$\kappa(s) := \langle \alpha''(s), \nu(s)\rangle\,.$$

Ist α nicht nach der Bogenlänge parametrisiert, so definieren wir die Krümmung von α durch

$$\kappa_\alpha := \kappa_{\alpha\circ\varphi} \circ \varphi^{-1}\,,$$

wobei φ eine orientierungserhaltende C^2-Parametertransformation ist, so dass $\alpha \circ \varphi$ nach der Bogenlänge parametrisiert ist.

Zeige, dass die Krümmung einer nicht nach der Bogenlänge parametrisieren Kurve wohldefiniert ist.

Aufgabe 6. (4 Punkte)
Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ eine reguläre C^2-Kurve.

(i) Nehme an, dass $\|\alpha(t)\|$ an der Stelle t_0 ein lokales Maximum hat. Zeige, dass dann
$$|\kappa(t_0)| \geq \frac{1}{\|\alpha(t_0)\|}$$
gilt, wobei $\kappa : I \to \mathbb{R}$ die Krümmung von α ist.

(ii) Nehme nun an, dass für ein $s_0 \in I$ und ein $r \in \mathbb{R}_+$ die Bedingungen
$$\alpha(s_0) = (r, 0)\,, \quad \alpha'(s_0) = (0, 1)\,, \quad \text{sowie} \quad \kappa(s_0) > \frac{1}{r}$$
gelten. Zeige, dass die Kurve α lokal um $\alpha(s_0)$ innerhalb der Kreisscheibe $B_r(0)$ liegt.

Abgabe: Bis Donnerstag, 09.11.2017, 10.00 Uhr, in die Mappe vor Büro F 402.