Oliver Schnürer, Universität Konstanz Wintersemester 2017/2018
Friederike Dittberner

Übungen zur Vorlesung Differentialgeometrie I

Blatt 13

Aufgabe 50. (Homothetisch schrumpfende Lösungen des MCF) (4 Punkte)
Erfüllt eine Einbettung $X_0 : M \to \mathbb{R}^{n+1}$

$$H(x) = \lambda \langle X_0(x) - x_0, \nu_0(x) \rangle$$

in jedem Punkt $x \in M$ für eine Konstante $\lambda > 0$ und $x_0 \in \mathbb{R}^{n+1}$, dann generiert sie eine homothetisch schrumpfende Lösung des MCF. Umgekehrt, falls $X : M \times [0, T) \to \mathbb{R}^{n+1}$ eine homothetisch schrumpfende Lösung des MCF um einen Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^{n+1}$ in einem maximalen Zeitinterval ist, dann ist entweder $H \equiv 0$ oder

$$H(x, t) = \frac{1}{2(T - t)} \langle X(x, t) - x_0, \nu(x, t) \rangle$$

für jeden Punkt $x \in M$ und und jede Zeit $t \in [0, T)$.

Aufgabe 51. (4 Punkte)
Beweise Theorem 10.21.

Aufgabe 52. (Niveauflächenfluss I) (4 Punkte)
Sei $w : \mathbb{R}^{n+1} \times [0, T) \to \mathbb{R}$ mit $\nabla w \neq 0$ und definiere $M_t := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : w(x, t) = 0\}$.

Zeige, dass w genau dann

$$\dot{w} = \left(\delta^{ij} - \frac{w^i w^j}{|Dw|} \right) w_{ij}$$

erfüllt, wenn $(M_t)_{t \in [0,T)}$ eine Lösung des klassischen mittleren Krümmungsflusses ist.

Aufgabe 53. (Niveauflächenfluss II) (4 Punkte)
Sei $u : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ mit $\nabla u \neq 0$ sodass $H > 0$ auf $M_t := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : u(x) = t\}$ gilt. Es ist also $u(x)$ die Zeit, zu der die Hyperfläche M_t den Punkt $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ passiert.

Zeige, dass u genau dann

$$|Du| \operatorname{div} \left(\frac{Du}{|Du|} \right) = -1$$

erfüllt, wenn $(M_t)_{t \in [0,T)}$ eine Lösung des klassischen mittleren Krümmungsflusses ist.

Zusatz: Welche Evolutionsgleichung gehört zur Differentialgleichung

$$\operatorname{div} \left(\frac{Du}{|Du|} \right) = |Du| \, ?$$

Abgabe: Bis Donnerstag, 08.02.2018, 10.00 Uhr, in die Mappe vor Büro F 402.