Oliver Schnürer, Friederike Dittberner | Universität Konstanz | Wintersemester 2017/2018

Übungen zur Vorlesung Differentialgeometrie I

***Blatt 12***

**Aufgabe 46.** (Grim Reaper-Lösung) (3 Punkte)
Zeige, dass der Graph der Funktion $u(x,t) = -\log\cos x + t$, $(x,t) \in (-\pi/2, \pi/2) \times \mathbb{R}$ eine Lösung des mittleren Krümmungsflusses ist.

**Aufgabe 47.** (Zylinder)(3 Punkte)
Führe die Details zu Übung 10.7 über Zylinder aus:

Finde Lösungen von $\left\langle \frac{\partial}{\partial t} X, \nu \right\rangle = -H$ und $\frac{\partial}{\partial t} X = -H\nu$ für den Fall, dass $M_0$ ein Zylinder ist, dass also $M_0 = \left(R \cdot \mathbb{S}^k\right) \times \mathbb{R}^{n-k}$ für ein $R > 0$ gilt.

**Aufgabe 48.** (Volumenerhaltender und flächenerhaltender mittlerer Krümmungsfluss) (6+2 Punkte)
Sei $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ eine $n$-dimesionale, glatte, geschlossene Untermannigfaltigkeit mit Einbettung $X$ und eingeschlossener Menge $N$, wobei $M = \partial N$. Wir wollen zwei Gradientenflüsse finden.

(V) soll den $n$-dimensionalen Flächeninhalt $\mathcal{A}(M)$ verkleinern und gleichzeitig das $n+1$-dimensionale Volumen $\mathcal{V}(N)$ konstant halten.
(F) soll den $n$-dimensionalen Flächeninhalt $\mathcal{A}(M)$ konstant halten und gleichzeitig das $n+1$-dimensionale Volumen $\mathcal{V}(N)$ vergrößern,

Zeige, dass

$$\text{für (V)} \quad \dot{X} = \left( \frac{\int_{M_t} H \; d\mu_t}{\int_{M_t} d\mu_t} - H \right) \nu \quad \text{und für (F)} \quad \dot{X} = \left( 1 - \frac{\int_{M_t} H \; d\mu_t}{\int_{M_t} H^2 \; d\mu_t} H \right) \nu$$

gilt.

*Zusatz:* Zeige durch Reparametresieren der Zeit, dass für (F)

$$\dot{X} = \left( \frac{\int_{M_t} H^2 \; d\mu_t}{\int_{M_t} H \; d\mu_t} - H \right) \nu$$

gilt.

*Hinweis:* Berechne zunächst die $L_2$-Gradienten $\nabla\mathcal{A}$ und $\nabla\mathcal{V}$ mit Hilfe der Fréchet-Ableitungen und dem Divergenzsatz. Berechne dann die tangentialen Gradienten bezüglich der Niveauflächen $\mathcal{S}_\sigma(\mathcal{V}) := \{Y \in C^\infty : \mathcal{V}(Y) = \sigma\}$ und $\mathcal{S}_\sigma(\mathcal{A}) := \{Y \in C^\infty : \mathcal{A}(Y) = \sigma\}$.

**Aufgabe 49.** (3 Punkte)
Sei $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ eine $n$-dimensionale Untermannigfaltigkeit. Sei $f : M \to \mathbb{R}$. Sei $\alpha : [a,b] \to M$ eine Integralkurve von $\nabla f$, d. h. $\dot{\alpha}(t) = \nabla f(\alpha(t))$, und $\beta : [a,b] \to M$ eine weitere Kurve mit $\alpha(a) = \beta(a)$ und $\|\dot{\alpha}(t)\| = \|\dot{\beta}(t)\|$ für alle $t \in [a,b]$.

Beweise oder widerlege folgende Ausssage:
Es gilt $f(\alpha(t)) \geq f(\beta(t))$ für alle $t \in [a,b]$ mit Gleichheit genau dann wenn $\alpha = \beta$.

**Abgabe:** Bis Donnerstag, 01.02.2018, 10.00 Uhr, in die Mappe vor Büro F 402.