Oliver Schnürer, Friederike Dittberner | Universität Konstanz | Wintersemester 2017/2018

Übungen zur Vorlesung Differentialgeometrie I

Blatt 11

Aufgabe 42. (3 Punkte)
Sei $\Omega \in \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und sei $\partial\Omega$ glatt. Zeige, dass

$$\Delta \nabla d^2 = H\nu$$

gilt.

Aufgabe 43. (6 Punkte)
Sei $\Omega \in \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und sei $\partial\Omega \in C^2$ mit $H(\partial\Omega) \geq 0$. Sei $\varphi \in C^2(\bar{\Omega})$ und $M > 0$. Sei $U_\delta := \{x \in \Omega : d(x) < \delta\}$. Dann gibt es $\varepsilon_0 > 0$ und für alle $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ eine Funktion $w \in C^2(U_\varepsilon)$ mit

$$\begin{cases} \operatorname{div}\left(\frac{\nabla w}{\sqrt{1+|\nabla w|^2}}\right) \leq 0 & \text{in } U_\varepsilon \\ w = \varphi & \text{auf } \partial\Omega \\ w \geq M & \text{auf } \partial U_\varepsilon \cap \Omega\,. \end{cases}$$

Hinweis: Betrachte die Funktion $w = \varphi + \psi$ mit $\psi = \delta \cdot \log(1 + \sigma \cdot d)$ für geeignet gewählte $\delta, \sigma \in \mathbb{R}_{>0}$.

Aufgabe 44. (4 Punkte)
Beweise Lemma 10.3:

Sei $X \circ (\varphi^{-1} \times \mathrm{Id})$ eine lokale Lösung des mittleren Krümmungsflusses. Sei (V, ψ) eine weitere Karte. Seien (U, φ) und (V, ψ) C^2-verträglich, d. h. sei $\varphi \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap V) \to \varphi(U \cap V)$ ein C^2-Diffeomorphismus. Dann erfüllt $X \circ (\psi^{-1} \times \mathrm{Id}) : \psi(U \cap V) \times [0, T) \to \mathbb{R}^{n+1}$ ebenfalls lokal den mittleren Krümmungsfluss.

Aufgabe 45. (Sphären) (3 Punkte)
Führe die Details zu Beispiel 10.4 über Sphären aus:

Sei $M = \mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Sei $R > 0$. Dann ist $X : M \times \left[0, \frac{R^2}{2n}\right) \to \mathbb{R}^{n+1}$ mit $X(p, t) := p \cdot \sqrt{R^2 - 2nt}$ eine Lösung des mittleren Krümmungsflusses.

Abgabe: Bis Donnerstag, 25.01.2018, 10.00 Uhr, in die Mappe vor Büro F 402.