Oliver Schnürer, Universität Konstanz Wintersemester 2017/2018
Friederike Dittberner

Übungen zur Vorlesung Differentialgeometrie I

***Blatt 1***

**Aufgabe 1.** (4 Punkte)
Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ eine Menge, so dass zu je zwei Punkten $p, q \in X$ eine stückweise $C^1$-Kurve $\gamma : [0,1] \to X$ mit $\gamma(0) = p$ und $\gamma(1) = q$ existiert. Für $p, q \in X$ bezeichnen wir die Menge dieser Verbindungskurven mit $\Gamma(p, q)$. Definiere

$$d : X \times X \to \mathbb{R}$$

durch

$$d(p,q) := \inf_{\gamma \in \Gamma(p,q)} L(\gamma)\,,$$

wobei

$$L(\gamma) := \int_0^1 \|\gamma'(t)\|\, dt$$

die Länge von $\gamma$ bezeichnet. $d$ heißt geodätischer Abstand.

Zeige:

(i) $(X, d)$ ist ein metrischer Raum.
(ii) Es gibt $X \subset \mathbb{R}^n$ und $p,\, q \in X$, so dass das Infimum nicht angenommen wird.

**Aufgabe 2.** (4 Punkte)

(i) Sei $X = \mathbb{R}^2$ und $d$ wie in Aufgabe 1 der geodätische Abstand. Zeige, dass $d$ mit dem euklidischen Abstand übereinstimmt.

*Hinweis: Zeige, dass sich jede Verbindungskurve von $p$ nach $q \neq p$ längenvermindernd oder längenerhaltend zunächst zu einer Verbindungskurve auf der Geraden durch $p$ und $q$ und dann auf dem Geradensegment zwischen $p$ und $q$ deformieren lässt.*

(ii) Seien $x, y \in \mathbb{S}^2$ und definiere

$$d(x,y) := \inf\left\{L(\alpha) : \alpha : [0,1] \to \mathbb{S}^2,\ \alpha \text{ stückweise } C^1,\ \alpha(0) = x,\ \alpha(1) = y\right\}\,.$$

Nehme an die Erdoberfläche sei eine Kugel mit Radius $r = 6{,}371000785 \cdot 10^6$m. Bestimme den Abstand vom Konstanzer Münster ($47°39'48''$ nördlicher Breite, $9°10'34''$ östlicher Länge) zum Nordpol. (Punkte gibt es wie üblich nur für bewiesene Tatsachen.)

**Abgabe:** Bis Freitag, 27.10.2017, 10.00 Uhr, in die Mappe vor Büro F 402.